






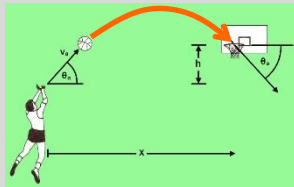
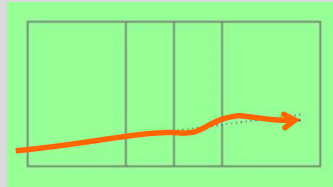


Entwicklung und positionsdatenbezogene Anwendung eines stochastischen Modells zur Trajektorien-simulation eines nichtrotierenden Volleyballs

Bernd Meyer, 25.07.2016 (AK3)

Einleitung: Unterscheidung von Optimierungsaufgaben in der Trajektoriensimulation und -analyse von Projektilen im Sportspiel

		„Bananenflanke“ / „Effet“ (u.a. Laumann, 2011)	„Der perfekte Wurf“ (u.a. Haußer & Luchko, 2011)	Knuckleball (ursprüngl. Baseball: u.a. Nathan (2012a, 2012b); Beachvolleyball ¹⁾ : u.a. Schemel (2014))
Beispiel		M. Kaltz (1975-1983 GER)  R. Carlos (1992-2006 BRA) (Freistoßtor 3.6.1997 Tournoi de France) 	D. Nowitzki (1997-2015 GER) 	E. Cicotte (1905-1920 MLB)   
	Trajektorie nichtlin. Modell	 DE ($\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$)	 DE ($\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$)	 SDE ($\mathcal{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$)
Einflussgrößen (Anfangsbed.)	Zielgröße	Krümmung Trajektorie	$\max\{ \pm\Delta\theta_a \}$	Kenngröße <i>Flattereffekt</i>
		<ul style="list-style-type: none">• Geschwindigkeit• Spin	<ul style="list-style-type: none">• Geschwindigkeit• Elevationswinkel• kein Sin / Spin	<ul style="list-style-type: none">• Geschwindigkeit• Elevationswinkel• Balllage } (Volleyball)
Bezug Wahrnehmung (und Handlung)		<ul style="list-style-type: none">• perzeptuell: Craig et al. (2006, 2009)• interzeptiv: Dessing & Craig (2010), Craig, Bastin & Montagne (2011), Casanova, Borg & Bootsma (2015).		<ul style="list-style-type: none">• interzeptiv (Volleyball): Benerink, Bootsma & Zaal (2015)

DE – Differential Equation
 \mathcal{T} – Zeitintervall, \mathbb{R}^3 – Euklidischer Raum

SDE – Stochastic Differential Equation
 Ω – Wahrscheinlichkeitsraum

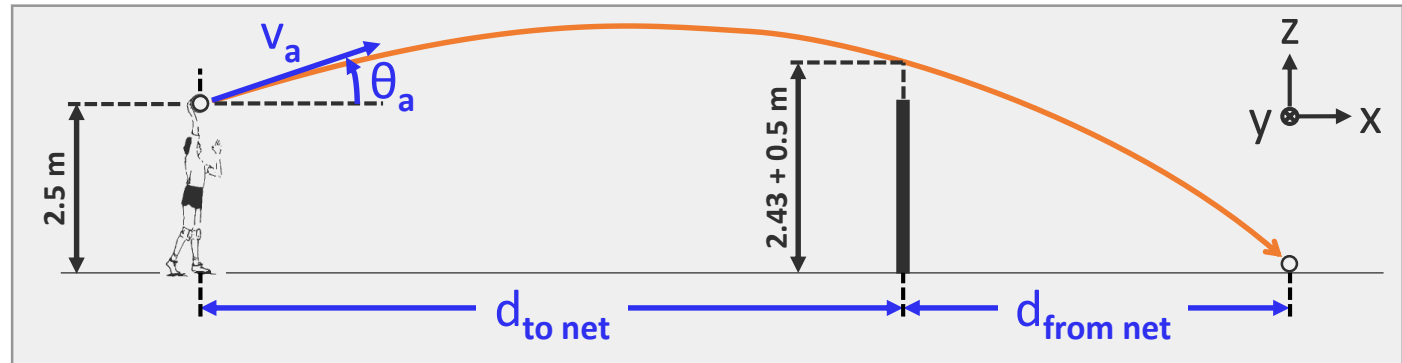
B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 2/28

¹⁾ Die Begriffe ‚Volleyball‘ und ‚Beachvolleyball‘ wurden synonym verwendet.

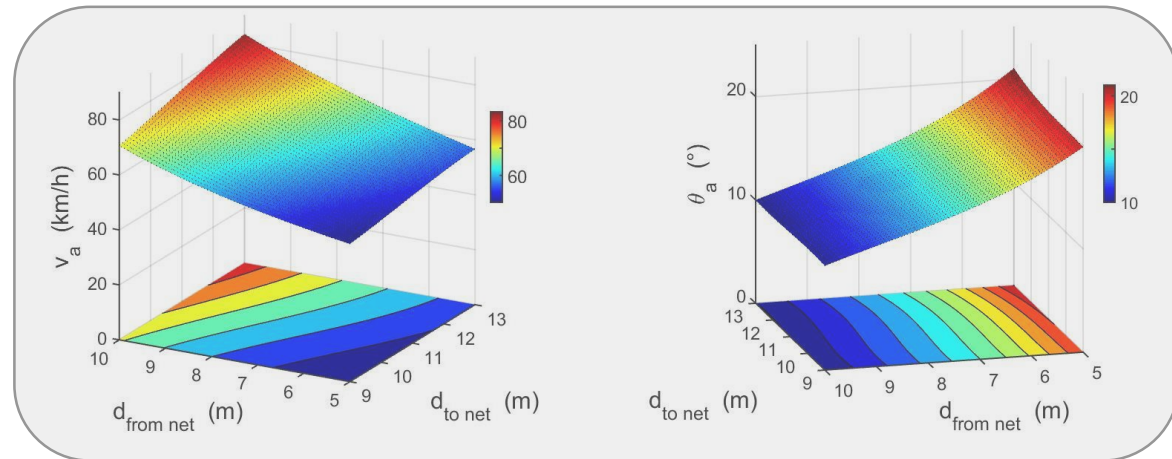
Problemstellung: Einfluss von relevanten kinematischen Variablen in der Unsicherheitsquantifizierung des Fluges eines nichtrotierenden Volleyballs

Vorbemerkungen (cw- (Continuous-wave-) Bedingungen)

Variablendefinition ²⁾ und Geometrie



Variablentransformation ($d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}$) \mapsto (v_a, θ_a)



Zusammenhang zwischen **Positionsdaten** ($d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}$) und (v_a, θ_a). Ergebnisse eines iterativen Lösens der DE (vgl. Lithio & Webb, 2006) für ($d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}$)-Abhängigkeiten (Modell #3) ³⁾. Iterationsschrittweiten: 1 m sowie 0.1 m/s (0.3 km/h) und 1°.

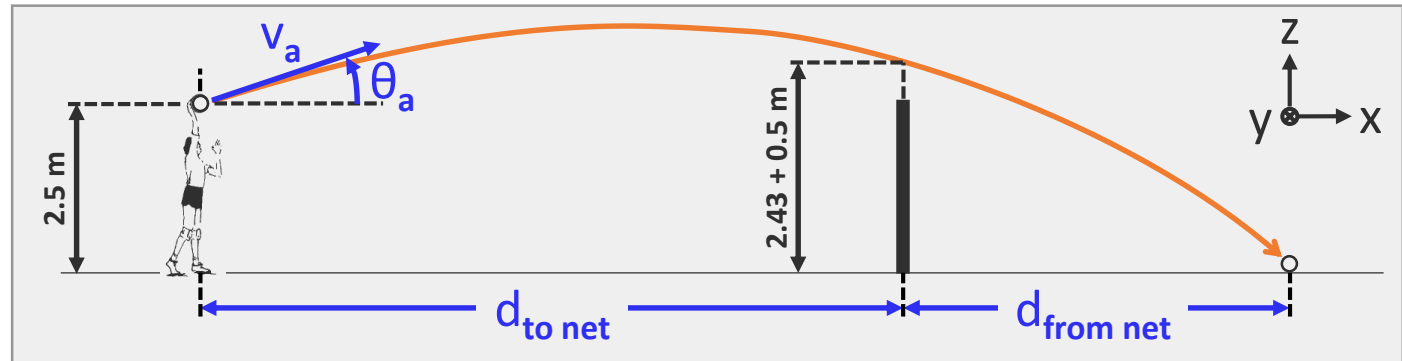
²⁾ Wenn nachfolgend nicht explizit angegeben, ist anzunehmen $d_{\text{to net}}=9$ m, $v_a=50$ km/h, $\theta_a=20^\circ$.

³⁾ Die zugrundeliegende Modellunterscheidung beruht auf einer Modellentwicklung (Folie 10). 10/11/2016

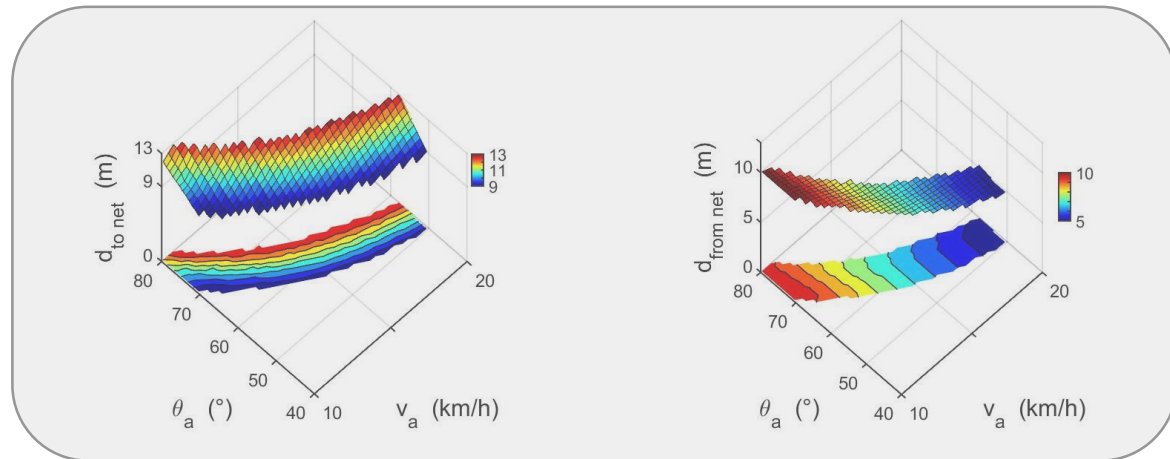
Problemstellung: Einfluss von relevanten kinematischen Variablen in der Unsicherheitsquantifizierung des Fluges eines nichtrotierenden Volleyballs

Vorbemerkungen (cw- (Continuous-wave-) Bedingungen)

Variablendefinition ²⁾ und Geometrie



Variablentransformation ($d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}$) \mapsto (v_a, θ_a)

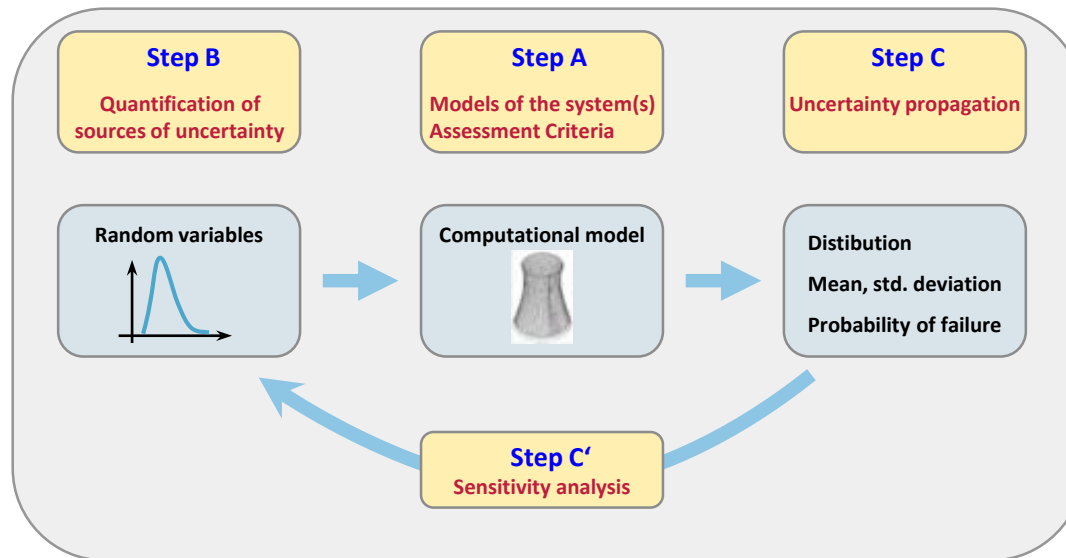


Zusammenhang zwischen **Positionsdaten** ($d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}$) und (v_a, θ_a). Ergebnisse eines iterativen Lösens der DE (vgl. Lithio & Webb, 2006) für (v_a, θ_a)-Abhängigkeiten (Modell #3) ³⁾. Iterationsschrittweiten: 1 m sowie 0.1 m/s (0.3 km/h) und 1°.

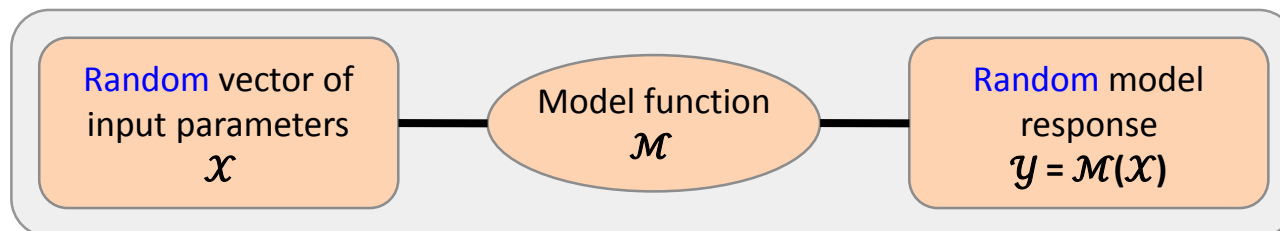
²⁾ Wenn nachfolgend nicht explizit angegeben, ist anzunehmen $d_{\text{to net}}=9$ m, $v_a=50$ km/h, $\theta_a=20^\circ$.

³⁾ Die zugrundeliegende Modellunterscheidung beruht auf einer Modellentwicklung (Folie 10).

Methodik (I): Generelles Framework der Unsicherheitsquantifizierung



Unsicherheitsanalyse (Sudret, 2007)



Unsicherheitsfortpflanzung (Blatman, 2009)

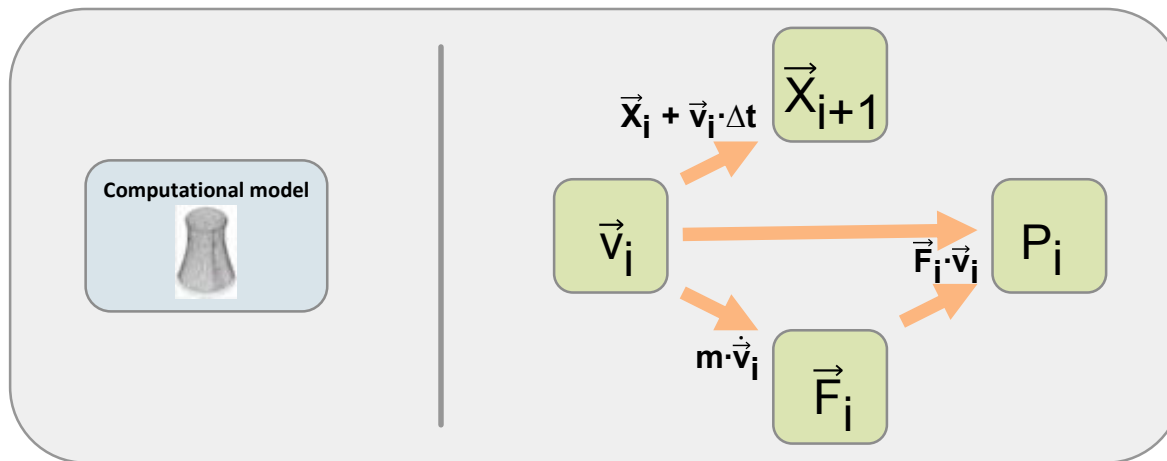
Systemmodell

Zweites Newton'sches Gesetz: $m \cdot \ddot{\vec{X}} \approx m \cdot \vec{g} + \vec{F}_w + \vec{F}_a$ (Kagan & Nathan, 2014)

$$\dot{v}_x = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_x - k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \sin(\theta_a)$$

$$\dot{v}_y = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_y + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot (v_x \cdot \sin(\theta_a) - v_z \cdot \cos(\theta_a))$$

$$\dot{v}_z = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_z + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \cos(\theta_a)$$



Computermodell: Zusammenhang von Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und verwandten Größen (Ortsvektor \vec{X} , Kraftvektor \vec{F} und Leistung P) bei Zeitdiskretisierung. Zur numerischen Berechnung von $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^N$ eignet sich ein **Runge-Kutta-Verfahren** (bspw. ode45 (MATLAB®)).

Typische (verwendete) Werte: $\Delta t = 0.1$ ms, $N = 0.9 \dots 1.7 \cdot 10^4$.

$$k = \frac{\rho_L}{2} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

D – Durchmesser (0.22 m)
m – Masse (0.270 kg)
 ρ_L – Luftdichte (1.2 kg·m⁻³)

C_a – Auftriebsbeiwert
 C_w – Widerstandsbeiwert
g – Erdbeschleunigung (9.81 m·s⁻²)
v – Betrag Geschwindigkeitsvektor.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

v_x, v_y, v_z – \vec{v} -Komponente in x-, y-, z-Richtung.

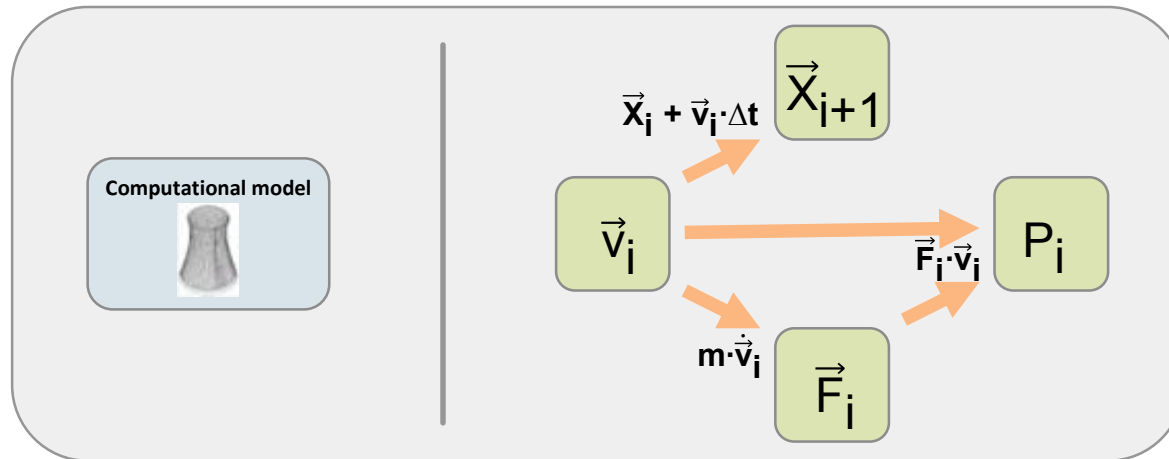
Systemmodell

Zweites Newton'sches Gesetz: $m \cdot \ddot{\vec{X}} \approx m \cdot \vec{g} + \vec{F}_w + \vec{F}_a$ (Kagan & Nathan, 2014)

$$\dot{v}_x = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_x - k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \sin(\theta_a)$$

$$\dot{v}_y = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_y + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot (v_x \cdot \sin(\theta_a) - v_z \cdot \cos(\theta_a))$$

$$\dot{v}_z = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_z + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \cos(\theta_a)$$



Computermodell: Zusammenhang von Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und verwandten Größen (Ortsvektor \vec{X} , Kraftvektor \vec{F} und Leistung P) bei Zeitdiskretisierung. Zur numerischen Berechnung von $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^N$ eignet sich ein **Runge-Kutta-Verfahren** (bspw. ode45 (MATLAB®)).

Typische (verwendete) Werte: $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$, $N = 0.9 \dots 1.7 \cdot 10^4$.

$$k = \frac{\rho_L}{2} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

D – Durchmesser (0.22 m)
 m – Masse (0.270 kg)
 ρ_L – Luftdichte (1.2 kg·m⁻³)

C_a – Auftriebsbeiwert
 C_w – Widerstandsbeiwert
 g – Erdbeschleunigung (9.81 m·s⁻²)
 v – Betrag Geschwindigkeitsvektor.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

v_x, v_y, v_z – \vec{v} -Komponente in x-, y-, z-Richtung.

Systemmodell

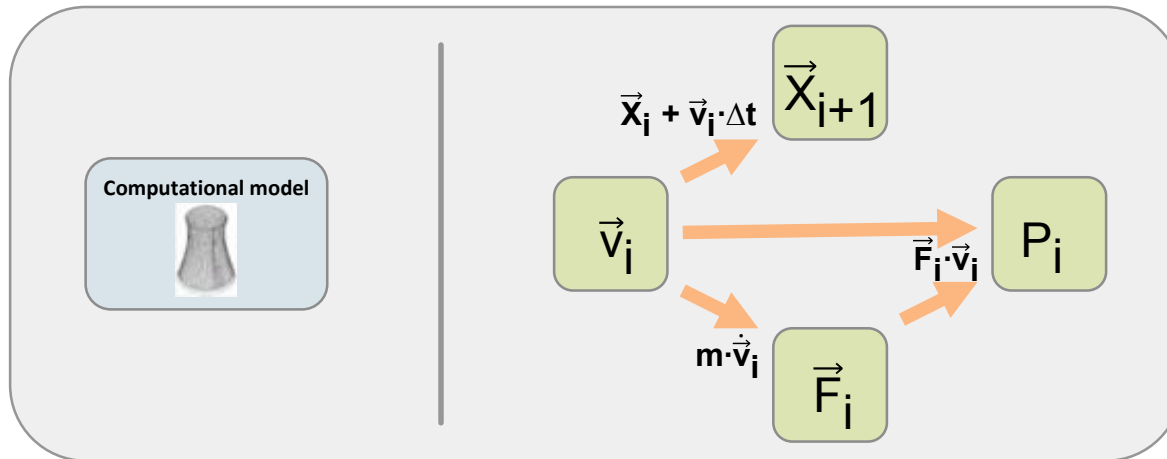
Zweites Newton'sches Gesetz: $m \cdot \ddot{\vec{X}} \approx m \cdot \vec{g} + \vec{F}_w + \vec{F}_a$ (Kagan & Nathan, 2014)

$$\dot{v}_x = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_x - k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \sin(\theta_a)$$

$$\dot{v}_y = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_y + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot (v_x \cdot \sin(\theta_a) - v_z \cdot \cos(\theta_a))$$

$$\dot{v}_z = -g - k \cdot C_w(v) \cdot v \cdot v_z + k \cdot C_a(v) \cdot v \cdot v_y \cdot \cos(\theta_a)$$

$$v_y|_{t=0} = 0$$



Computermodell: Zusammenhang von Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und verwandten Größen (Ortsvektor \vec{X} , Kraftvektor \vec{F} und Leistung P) bei Zeitdiskretisierung. Zur numerischen Berechnung von $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^N$ eignet sich ein **Runge-Kutta-Verfahren** (bspw. ode45 (MATLAB®)).

Typische (verwendete) Werte: $\Delta t = 0.1$ ms, $N = 0.9 \dots 1.7 \cdot 10^4$.

$$k = \frac{\rho_L}{2} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

D – Durchmesser (0.22 m)
 m – Masse (0.270 kg)
 ρ_L – Luftdichte (1.2 kg·m⁻³)

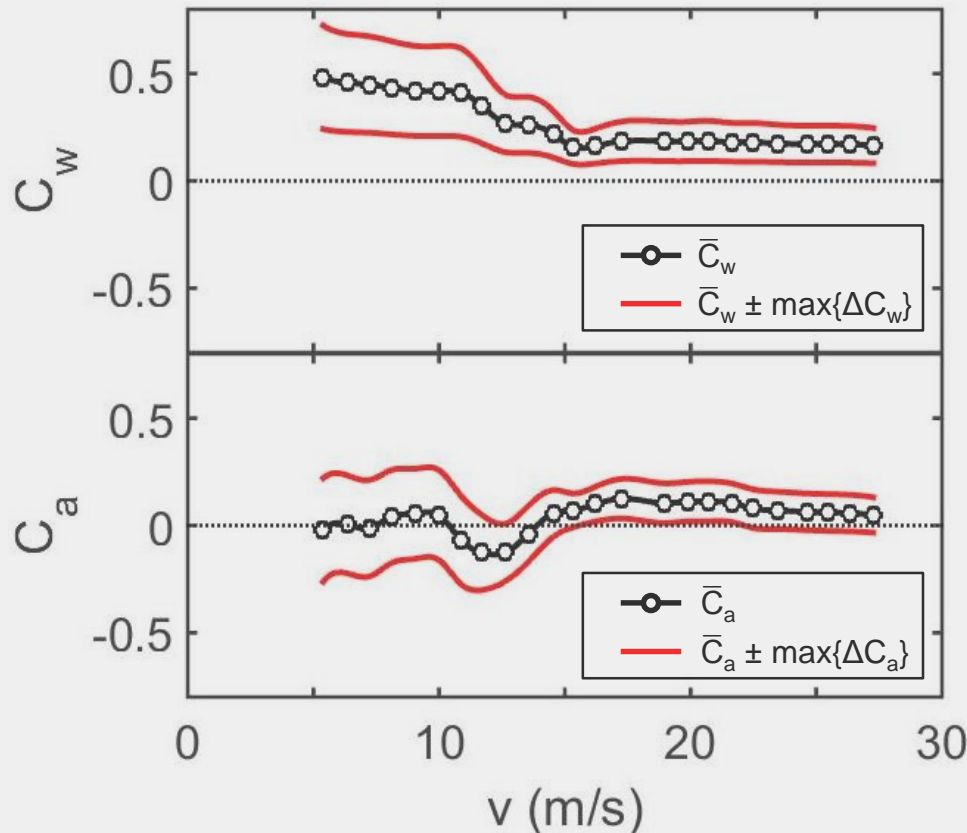
C_a – Auftriebsbeiwert
 C_w – Widerstandsbeiwert
 g – Erdbeschleunigung (9.81 m·s⁻²)
 v – Betrag Geschwindigkeitsvektor.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

v_x, v_y, v_z – \vec{v} -Komponente in x-, y-, z-Richtung.

Quantifizierung von Unsicherheitsquellen

Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a



\bar{C}_w, \bar{C}_a aus [Asai et al. \(2010\)](#)

$$\Delta C_w = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_w), \quad \Phi_w \sim U[-1,1]$$

$$\Delta C_a = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_a), \quad \Phi_a \sim U[-1,1]$$

[Wei et al. \(1988\)](#)

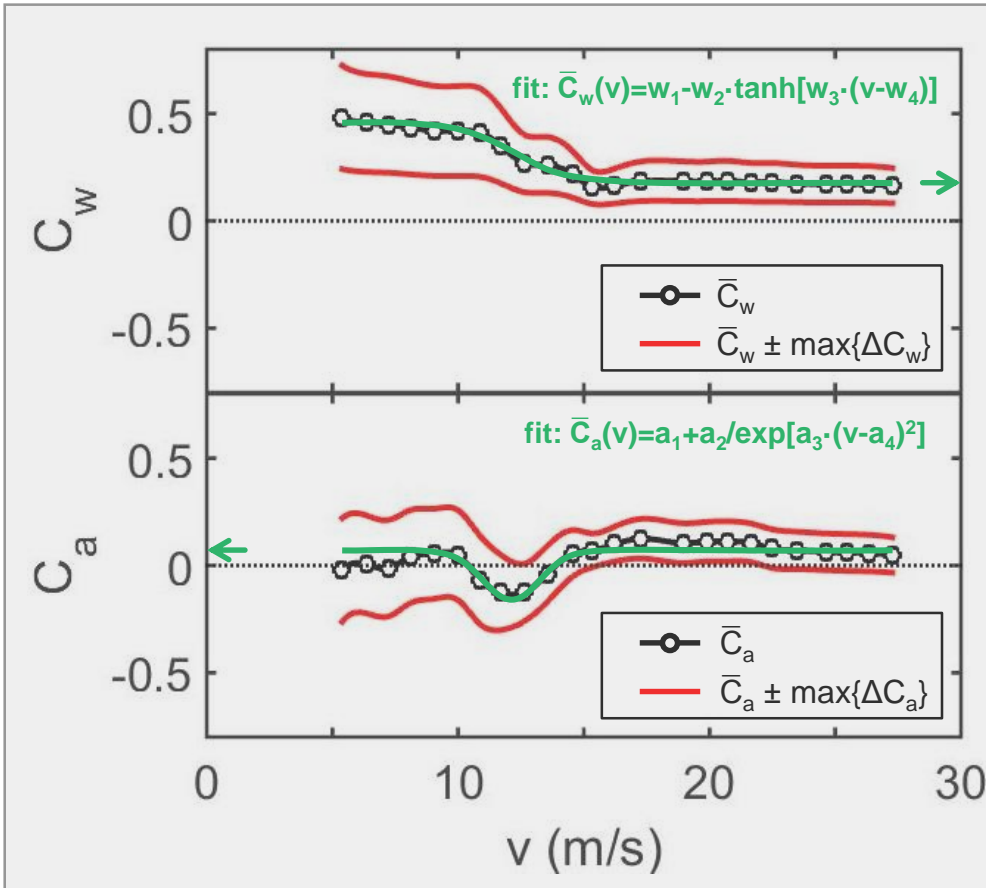
Komponente
des
Fourier-Spektrums
($f_r=0.25$ Hz)

Φ_w, Φ_a i.i.d.

(zum Vergleich von Fourier-
Koeffizienten siehe auch
[Novacek, 2012](#))

Quantifizierung von Unsicherheitsquellen

Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a



\bar{C}_w, \bar{C}_a aus Asai et al. (2010)

$$\Delta C_w = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_w), \quad \Phi_w \sim U[-1,1]$$

$$\Delta C_a = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_a), \quad \Phi_a \sim U[-1,1]$$

Wei et al.
(1988)

Komponente
des
Fourier-Spektrums
($f_r = 0.25$ Hz)

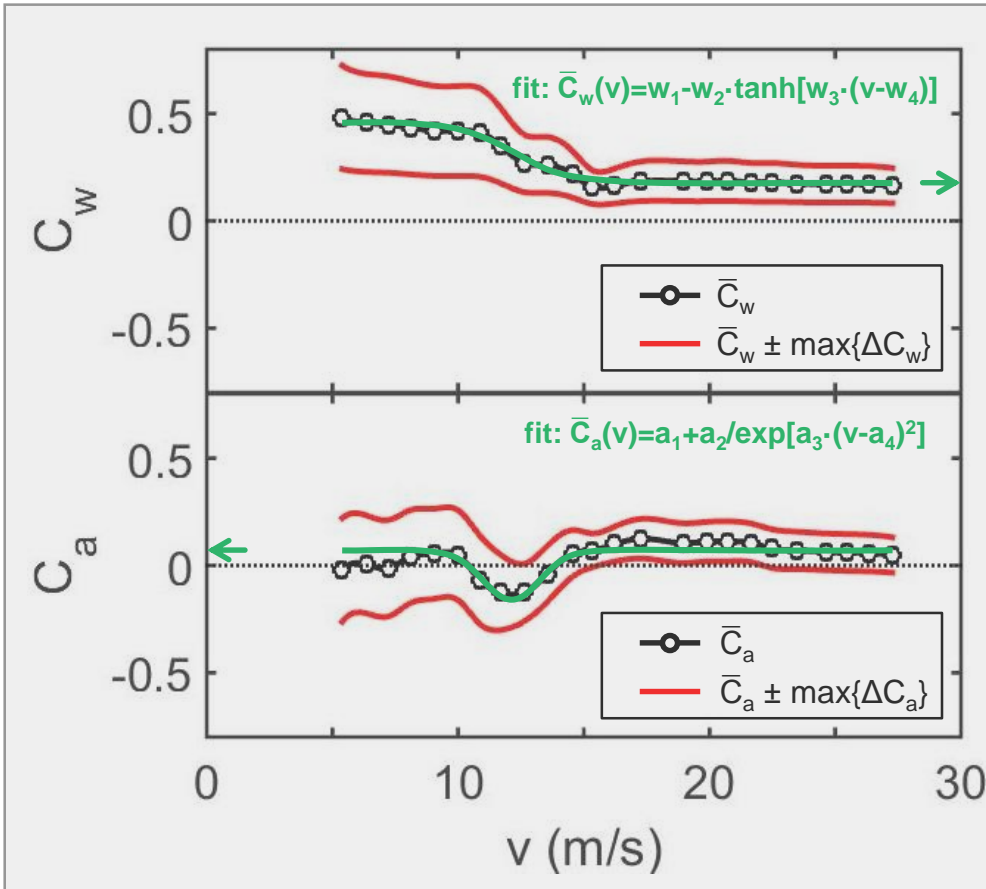
Φ_w, Φ_a i.i.d.

(zum Vergleich von Fourier-
Koeffizienten siehe auch
Novacek, 2012)

Angenommene Werte in nachfolgenden Ausdrücken $\bar{C}_w = \text{const.}$ und $\bar{C}_a = \text{const.}$ sind durch Pfeile markiert, entsprechend $w_1 - w_2 = 0.1745$ (→) und $a_1 = 0.0668$ (←).

Quantifizierung von Unsicherheitsquellen

Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a

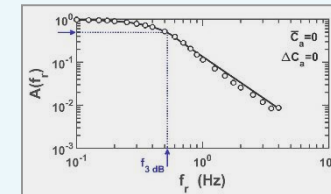


\bar{C}_w, \bar{C}_a aus Asai et al. (2010)

$$\Delta C_w = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_w), \quad \Phi_w \sim U[-1,1]$$

$$\Delta C_a = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_a), \quad \Phi_a \sim U[-1,1]$$

Wei et al. (1988)



Beispiel Bode-Diagramm:
Amplituden-Frequenzgang (Modell #3)

$$A(f_r) = \frac{\text{var}(x|_{t=t_e, f_r})}{\text{var}(x|_{t=t_e, 0})} \quad 4)$$

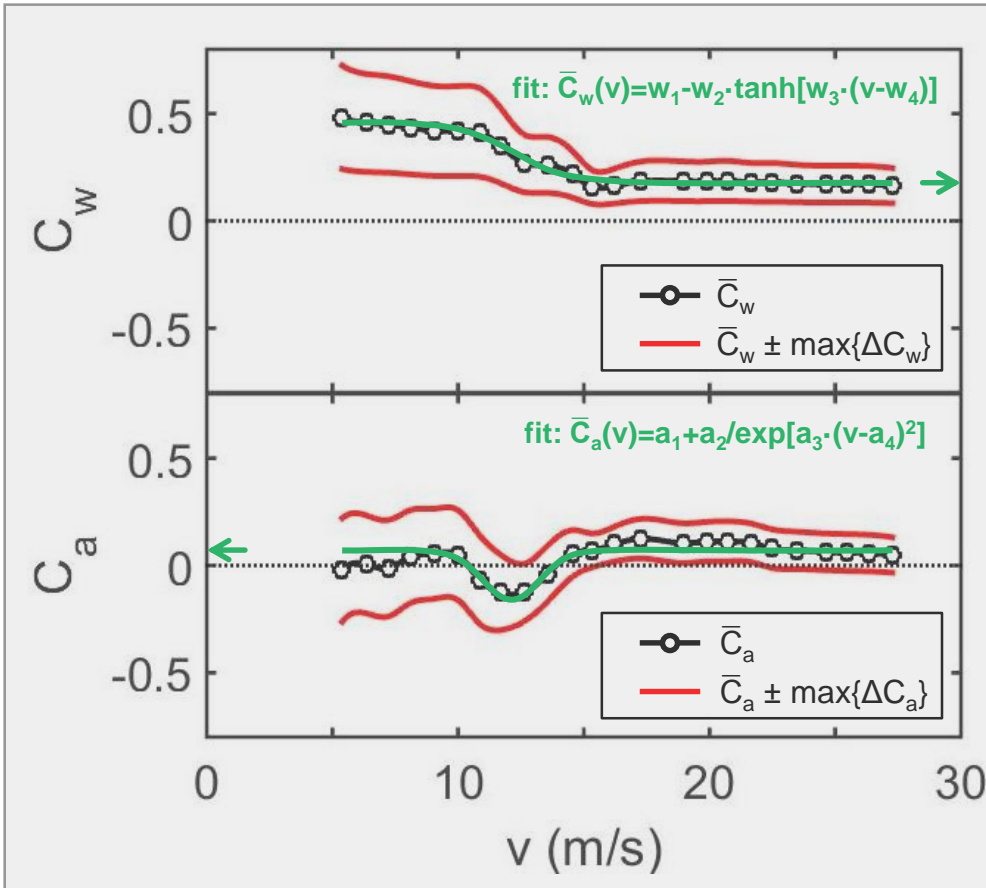
Φ_w, Φ_a i.i.d.

Angenommene Werte in nachfolgenden Ausdrücken $\bar{C}_w = \text{const.}$ und $\bar{C}_a = \text{const.}$ sind durch Pfeile markiert, entsprechend $w_1 - w_2 = 0.1745$ (→) und $a_1 = 0.0668$ (←).

- 4) Dieser Frequenzgang ohne Resonanzüberhöhung, dem eines PT2-Gliedes ähnlich, ergibt sich auch für Verallgemeinerungen (mehrdimensionaler Raum, Zeitintervall anstelle Zeitpunkt), wie sich durch Untersuchung einer spezifischen kovarianzbasierten Größe (vgl. Folie 19) zeigen lässt.

Quantifizierung von Unsicherheitsquellen

Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a

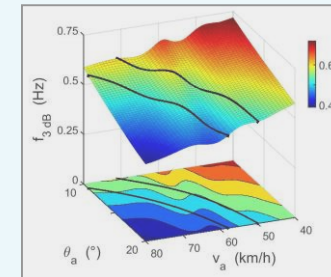


\bar{C}_w, \bar{C}_a aus Asai et al. (2010)

$$\Delta C_w = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_w), \quad \Phi_w \sim U[-1,1]$$

$$\Delta C_a = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_a), \quad \Phi_a \sim U[-1,1]$$

Wei et al. (1988)



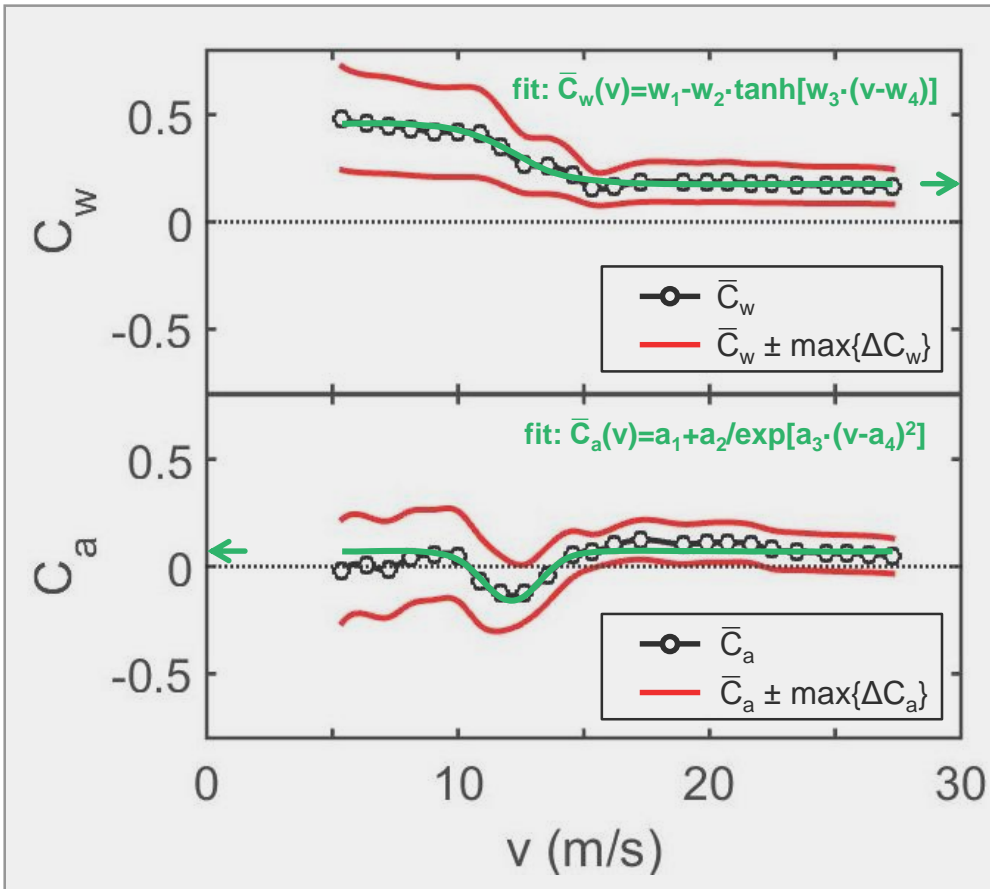
3 dB-Grenzfrequenz (Modell #3)
($A(f_r = f_{3\text{ dB}}) = 0.5$)

Φ_w, Φ_a i.i.d.

Angenommene Werte in nachfolgenden Ausdrücken $\bar{C}_w = \text{const.}$ und $\bar{C}_a = \text{const.}$ sind durch Pfeile markiert, entsprechend $w_1 - w_2 = 0.1745$ (→) und $a_1 = 0.0668$ (←).

Quantifizierung von Unsicherheitsquellen

Widerstandsbeiwert C_w und Auftriebsbeiwert C_a

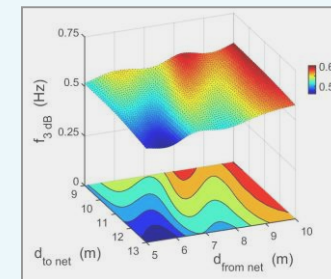


\bar{C}_w, \bar{C}_a aus Asai et al. (2010)

$$\Delta C_w = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_w), \quad \Phi_w \sim U[-1,1]$$

$$\Delta C_a = \frac{\bar{C}_w(v)}{2} \cdot \sin(2\pi f_r t + \pi \cdot \Phi_a), \quad \Phi_a \sim U[-1,1]$$

Wei et al. (1988)



3 dB-Grenzfrequenz (Modell #3)
($A(f_r = f_{3\text{ dB}}) = 0.5$)

Φ_w, Φ_a i.i.d.

Angenommene Werte in nachfolgenden Ausdrücken $\bar{C}_w = \text{const.}$ und $\bar{C}_a = \text{const.}$ sind durch Pfeile markiert, entsprechend $w_1 - w_2 = 0.1745$ (\rightarrow) und $a_1 = 0.0668$ (\leftarrow).

Vergleich von mathematischen Methoden zur Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung

$E(y)$ und $Var(y)$

	$E(y) = \langle y \rangle$	$Var(y) = \langle y - \langle y \rangle \rangle^2$
PCE	y_0	$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^M \\ \alpha \neq 0}} y_\alpha^2$
Moment (direkte Integration)	$\int_{\Omega} y(\omega) \cdot d\mathcal{P}(\omega)$	$\int_{\Omega} (y(\omega) - E(y))^2 \cdot d\mathcal{P}(\omega)$
Monte Carlo	$\frac{1}{n} \cdot \sum_i \mathcal{M}(x^{(i)})$	$\rightarrow \text{Kovarianzmatrix}$

$\mathcal{X} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^T$ (pseudozufällig generiert ⁵⁾)

Polynomielle Chaosentwicklung (PCE)

$$y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_\alpha \cdot \psi_\alpha(x), \quad \psi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^M P_{\alpha_i}^{(i)}(x_i).$$

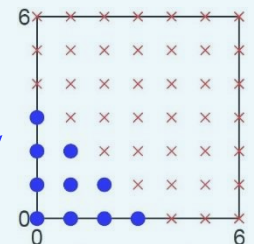
y_α -Berechnung: intrusive / nicht-intrusive Methoden
(für einen Überblick siehe u.a. Sudret, Blatman & Berveiller, 2011)

orthogonales Polynom
gemäß Wiener-Askey Schema

Rechenaufwand:

$$n = \binom{M+p}{p} \cdot 3$$

$M=2, p=3$



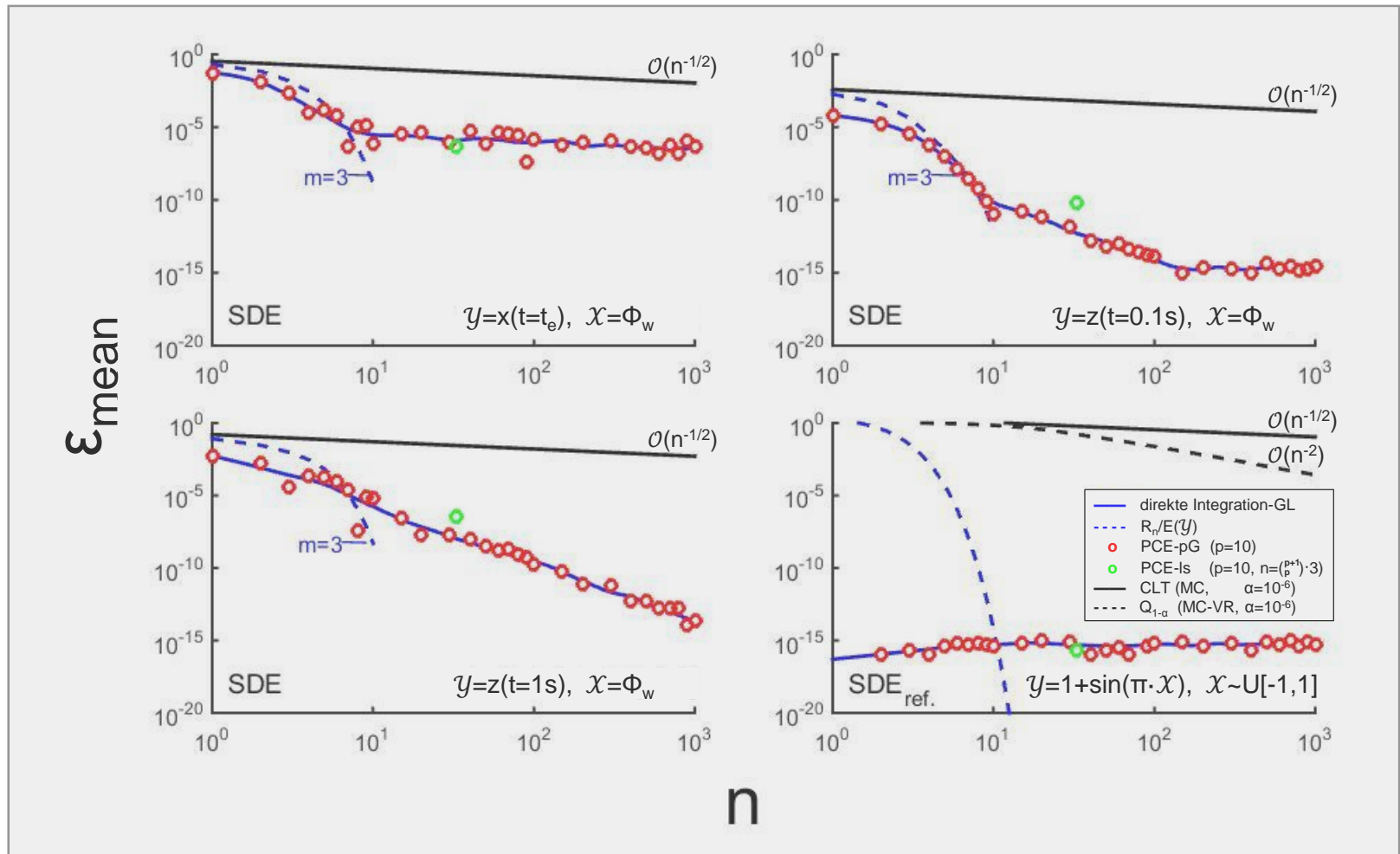
alle Symbole in üblicher Nomenklatur (u.a. Sudret, 2007, S. 49 ff.; Blatman, 2009, S. 7 ff.),
u.a.: M – Anzahl von Unsicherheitsquellen, n – Anzahl von Abtastpunkten, p – Grad der Entwicklung

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 7/28

- ⁵⁾ Im Folgenden wird stets verwendet $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\} = \{-1, -1+1 \cdot \Delta x, \dots, -1+(n-2) \cdot \Delta x, 1\}$ mit $\Delta x = 2/(n-1)$ (univariater Fall ($\Phi_w \sim U[-1, 1]$)), während sich im multivariaten Fall ($\Phi_w \sim U[-1, 1]$, $\Phi_a \sim U[-1, 1]$) aus der Gleichverteilung generierte i.i.d. Zufallszahlen nutzen lassen.

Vergleich von mathematischen Methoden zur Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (Modell #3 und Referenzmodell)

Fehlerabschätzung $E(y)$ in Abhängigkeit von n



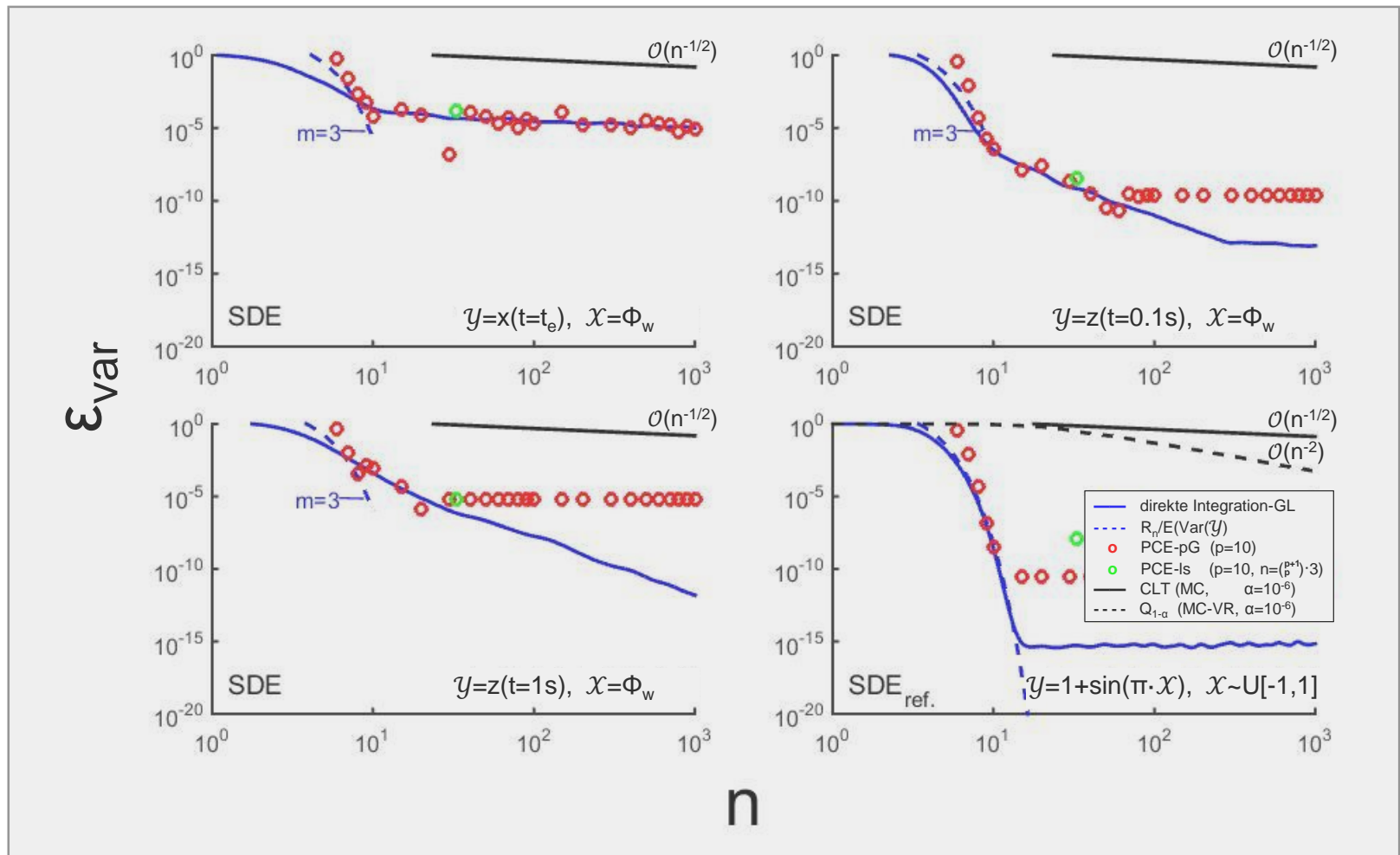
ϵ_{mean} – Fehlermaß für $E(y)$ (u.a. Xiu & Karniadakis, 2002), GL – Gauß-Legendre, R_n – Restglied, m – Ordnung einer Fourier-Entwicklung von $y(X)$, pG – pseudo-Galerkin, ls – „least square“, CLT – Central Limit Theorem, MC – Monte Carlo, VR – Varianzreduktion ⁶⁾

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 8/28

⁶⁾ $E(y)=0.5 \cdot (\max\{y\}-\min\{y\})$ wegen $y \sim \text{Beta}(0.5,0.5)$

Vergleich von mathematischen Methoden zur Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (Modell #3 und Referenzmodell)

Fehlerabschätzung $\text{Var}(y)$ in Abhängigkeit von n



ϵ_{var} – Fehlermaß für $\text{Var}(y)$ (u.a. Xiu & Karniadakis, 2002), GL – Gauß-Legendre, R_n – Restglied, m – Ordnung einer Fourier-Entwicklung von $y(x)$, pG – pseudo-Galerkin, ls – „least square“, CLT – Central Limit Theorem, MC – Monte Carlo, VR – Varianzreduktion ⁷⁾

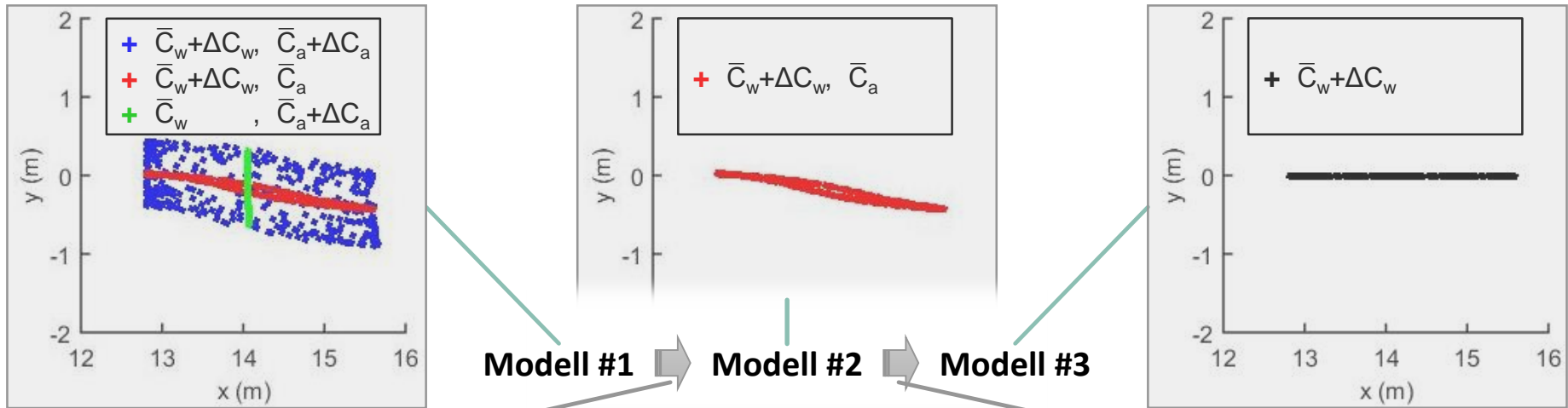
B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 9/28

⁷⁾ $\text{Var}(y)=0.125 \cdot (\max\{y\}-\min\{y\})^2$ wegen $y \sim \text{Beta}(0.5,0.5)$

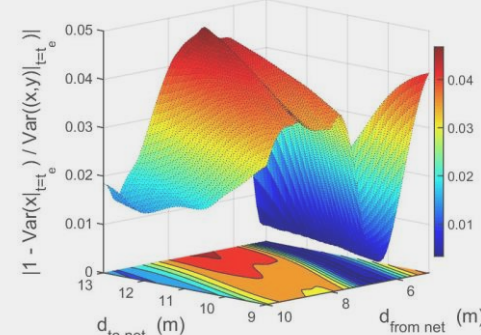
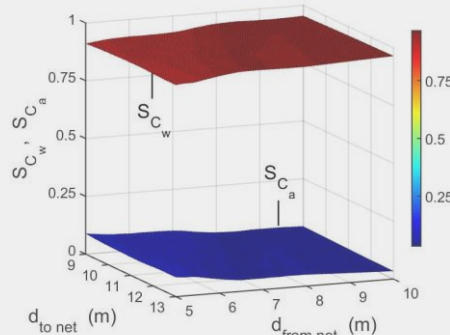
Methodik (II): Modellentwicklung: Verringerung der Anzahl von Unsicherheitsquellen und Dimensionsreduktion

Varianzanalysen des Ballauftreffortes $(x, y)|_{t=t_e}$ – Verifikation

Modellentwicklung und Ballauftrefforte (n=360)



Sobol' sche Indizes SC_w und SC_a aus PCE-basierter Analyse ($n = \binom{12}{10} \cdot 3$).



Vergleich $Var(x|_{t=t_e})$ (Modell #3) vs. $Var((x, y)|_{t=t_e})$ (Modell #2) auf Grundlage von PCE-basierten Analysen ($n = \binom{11}{10} \cdot 3$)

Verifikation

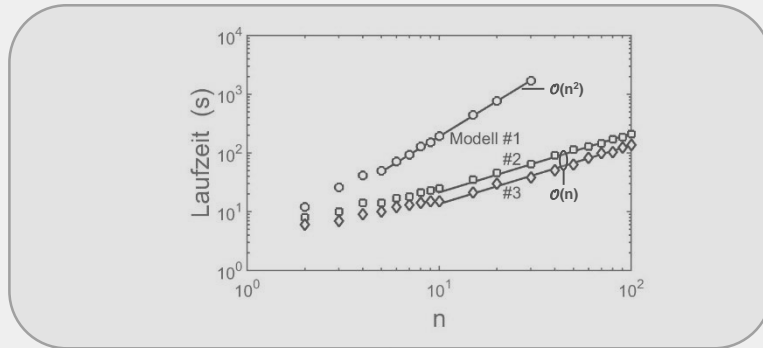
B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 10/28

Methodik (II): Modellentwicklung:

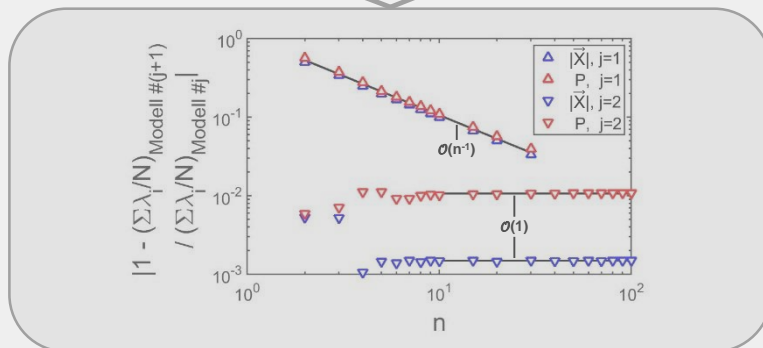
Verringerung der Anzahl von Unsicherheitsquellen und Dimensionsreduktion

Eigenwertanalysen im kovarianzbasierten Trajektorienmodell für Betrag Ortsvektor $|\vec{X}|$ und Leistung P – Verifikation und Rechenaufwand (n-Abhängigkeit)

modellspezifische Laufzeit ⁸⁾

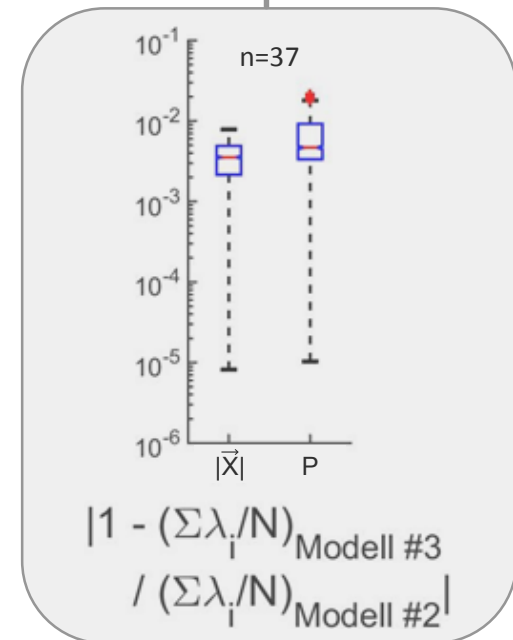


Modell #1 → Modell #2 → Modell #3



Rechenaufwand in Verifikation

Modell #2 → Modell #3



Verifikation ¹⁰⁾

N – Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix ⁹⁾, λ_i ($i=1, \dots, N$) – Eigenwerte der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 11/28

⁸⁾ Laufzeit: Dauer der Programmausführung

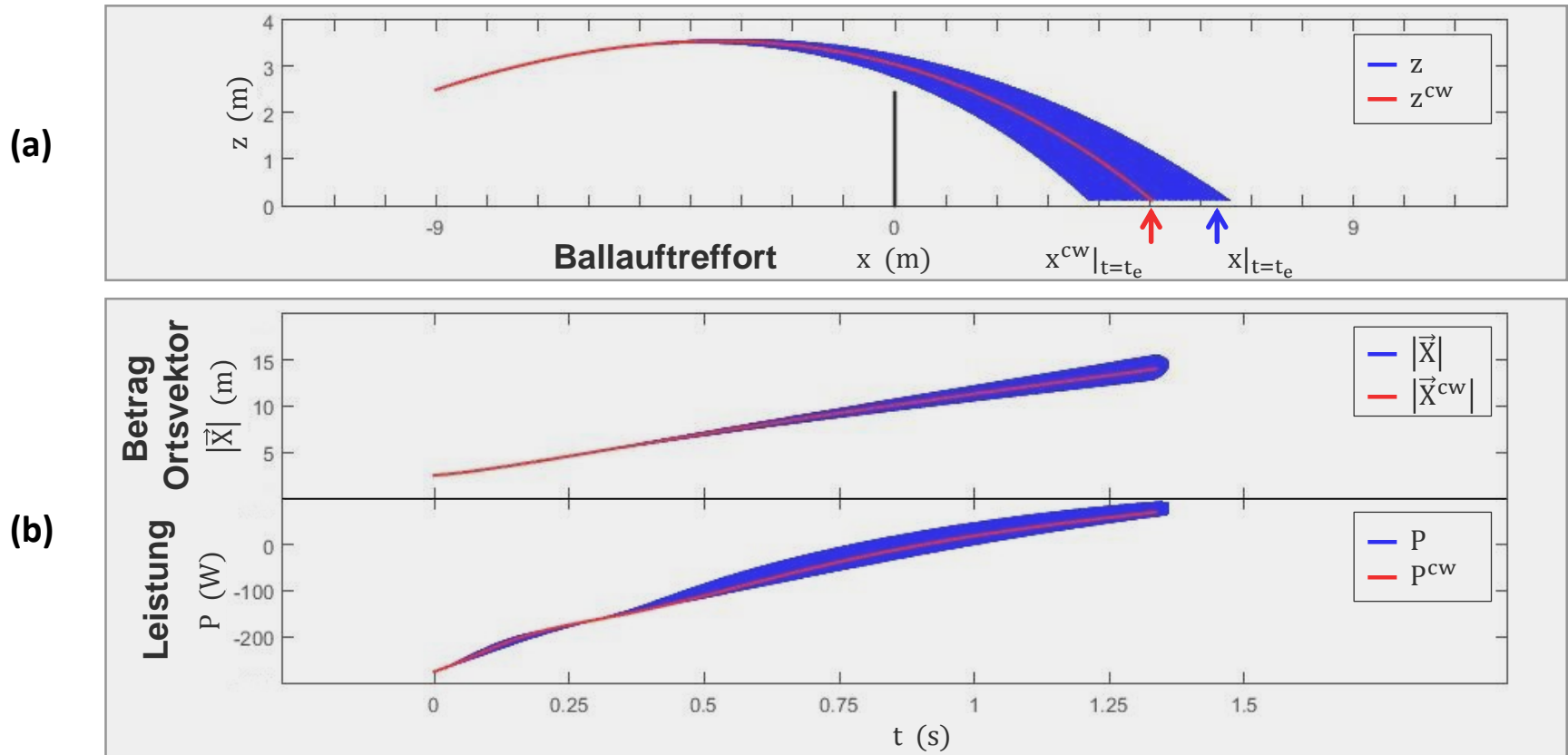
⁹⁾ für verwendete N-Werte siehe Anhang VI ($\bar{C}_w, \bar{C}_a=f(v)$)

¹⁰⁾ Da sich in Datenvisualisierungen unzureichend glatte Kurvenverläufe im Bereich $(d_{\text{to net}}, d_{\text{from net}}) = (9 \dots 13 \text{ m}, 5 \dots 10 \text{ m})$ ergeben, wurde eine Boxplot-Darstellung gewählt.

Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (\mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

Übersicht von \mathcal{Y} -Komponenten im räuml. / räuml.-zeitl. Bezug

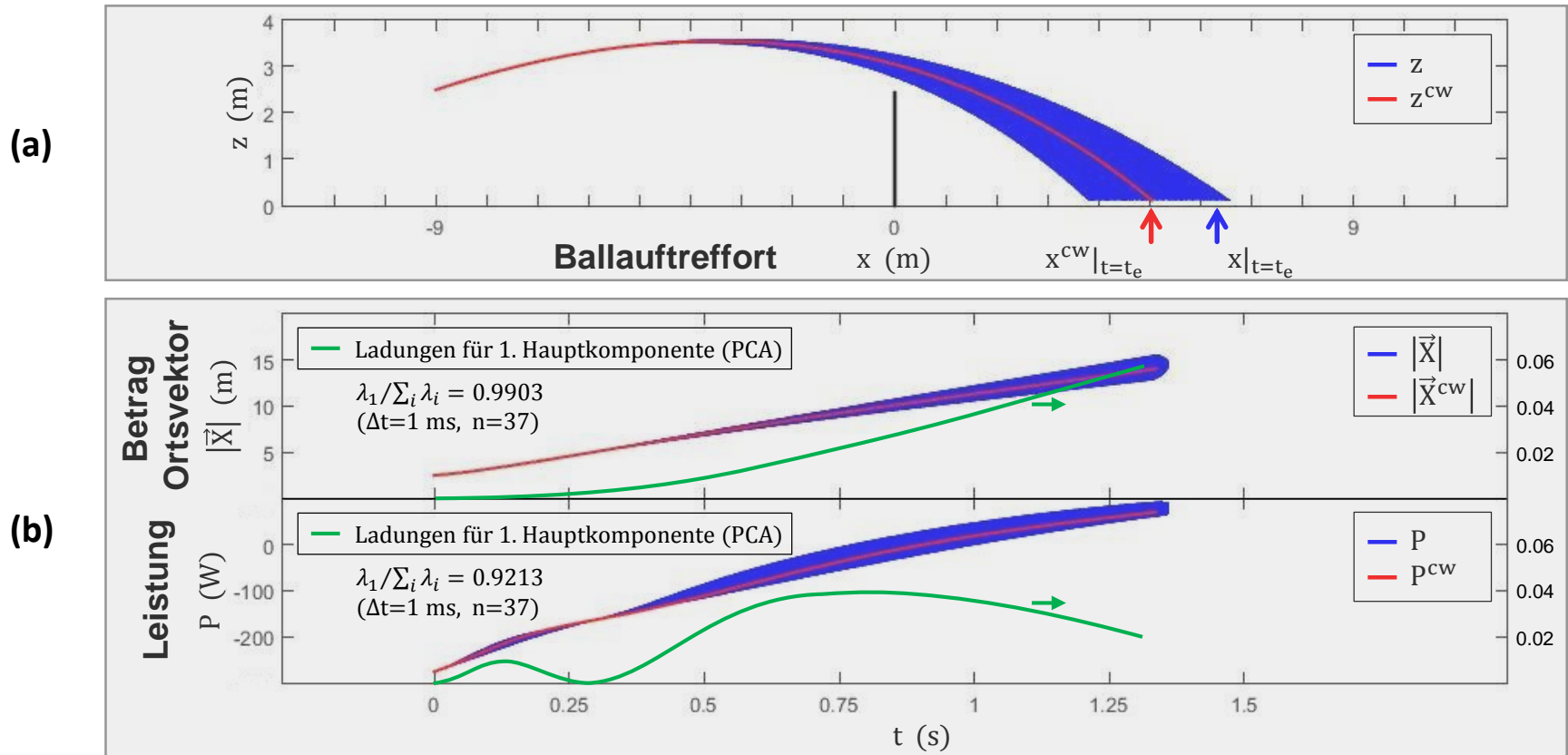
Dimensionalität in der Analyse von Punktverteilungen von Trajektorien (vgl. u.a. de Meneses et al., 2005): (a) räumlich, (b) räumlich-zeitlich.



Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (\mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

Übersicht von \mathcal{Y} -Komponenten im räuml. / räuml.-zeitl. Bezug

Dimensionalität in der Analyse von Punktverteilungen von Trajektorien (vgl. u.a. de Meneses et al., 2005): (a) räumlich, (b) räumlich-zeitlich.



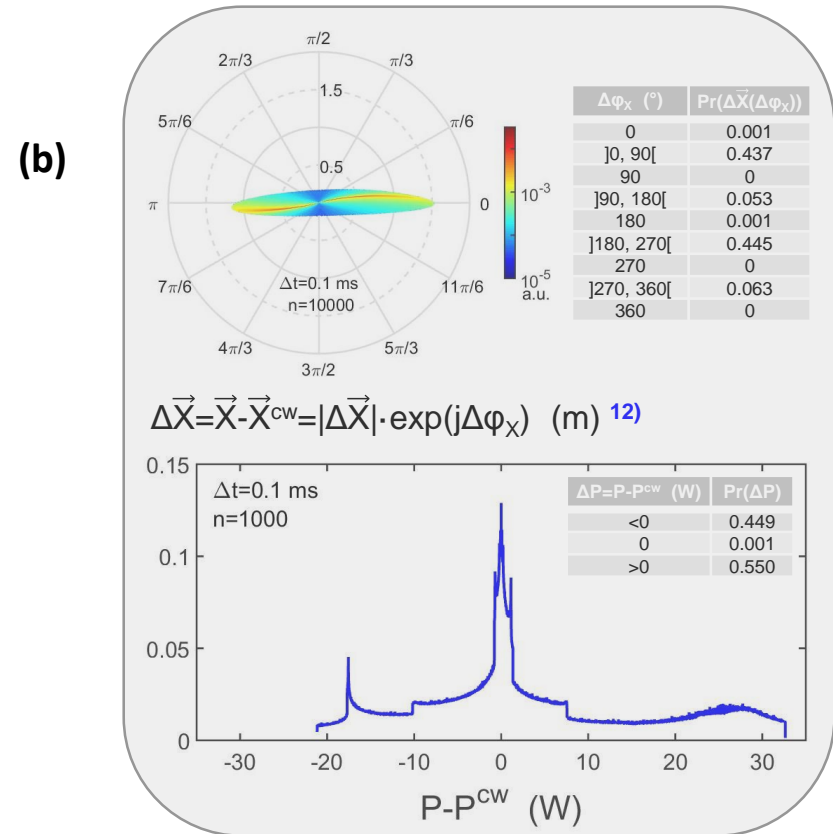
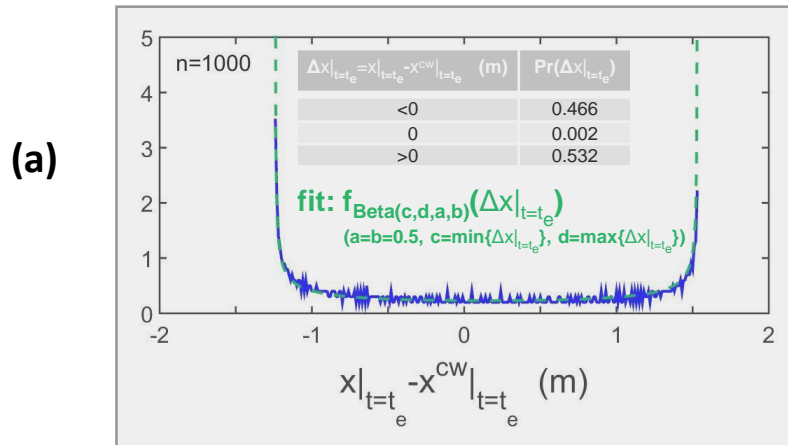
PCA – Principal Component Analysis

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 12/28

Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (\mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

Übersicht von \mathcal{Y} -Komponenten im räuml. / räuml.-zeitl. Bezug – Wahrscheinlichkeitsdichte ¹¹⁾

Dimensionalität in der Analyse von Punktverteilungen von Trajektorien (vgl. u.a. de Meneses et al., 2005): (a) räumlich, (b) räumlich-zeitlich.



$f_{\text{Beta}(c,d,a,b)}$ – Dichtefunktion der allg. Betaverteilung

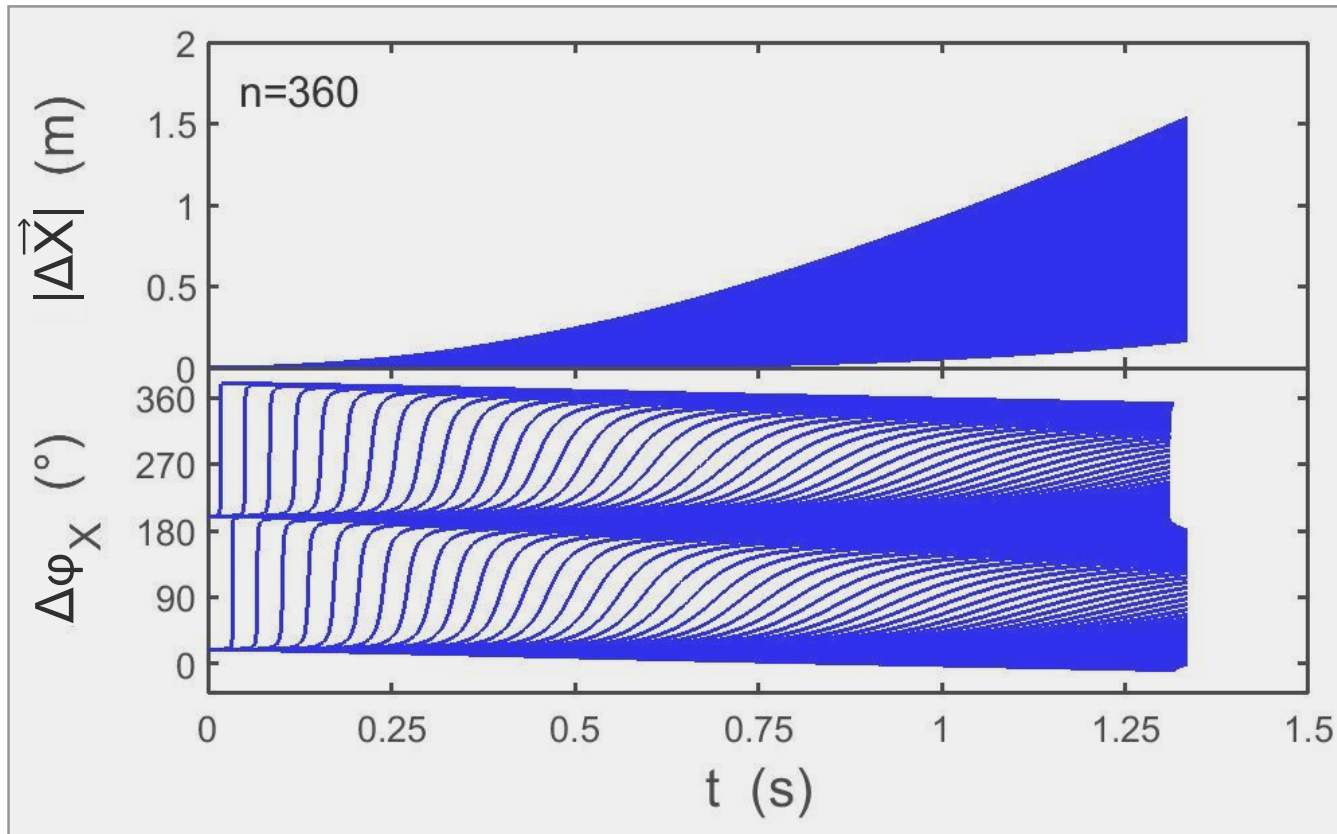
B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 13/28

¹¹⁾ Berechnungen wurden ausgeführt mit Auflösungen 0.01 m, 0.1° und 0.01 W.

¹²⁾ $\Delta \phi_x = \arctan\left(\frac{x_z - x_z^{CW}}{x_x - x_x^{CW}}\right)$

Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

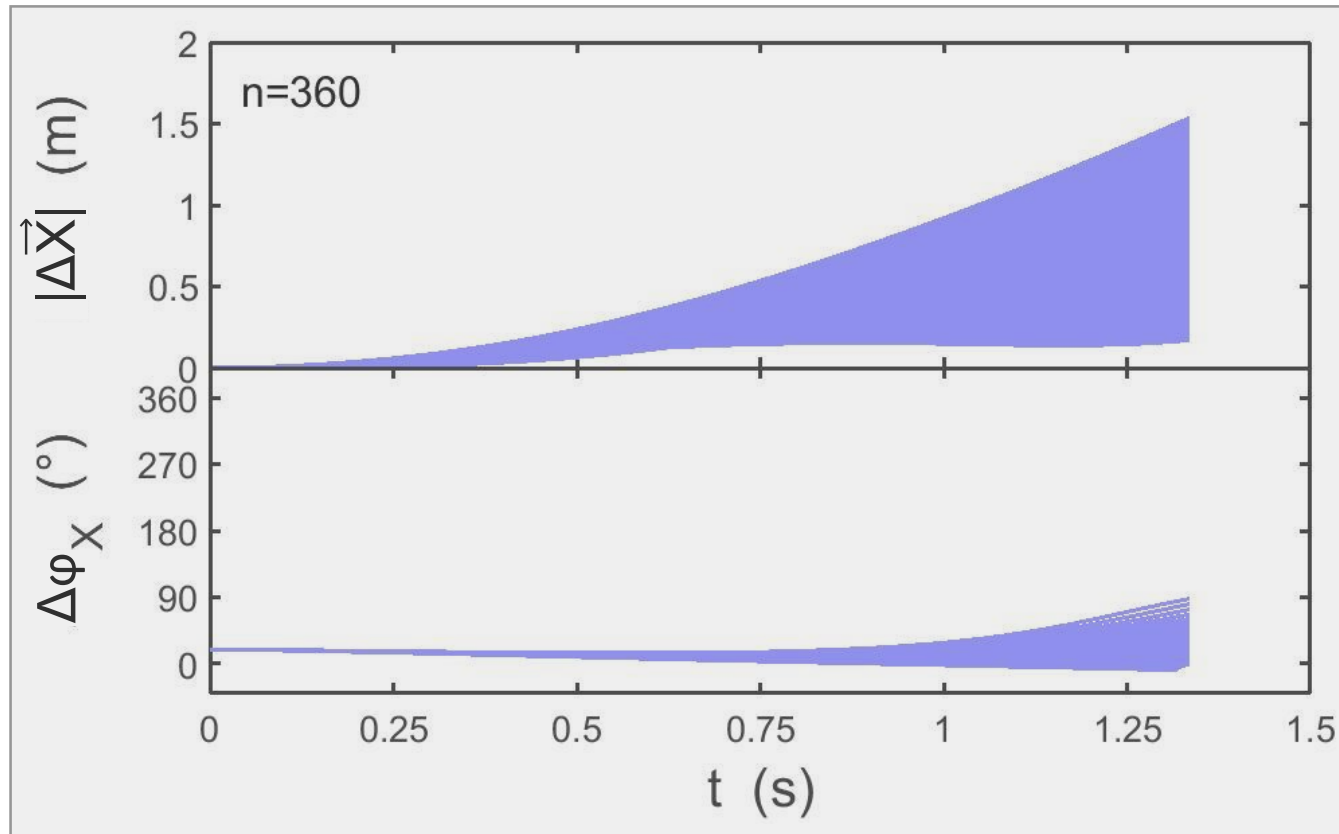
γ -Komponente ($|\Delta\vec{X}|$ und $\Delta\phi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\phi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung)



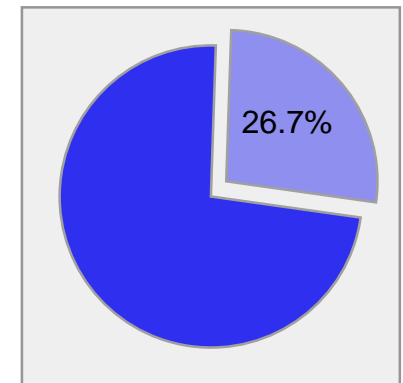
$|\Delta\vec{X}|(t)$ -, $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe für sämtliche (360) Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraums der C_w -Unsicherheitsquelle

Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

γ -Komponente ($|\Delta\vec{X}|$ und $\Delta\phi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\phi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung)

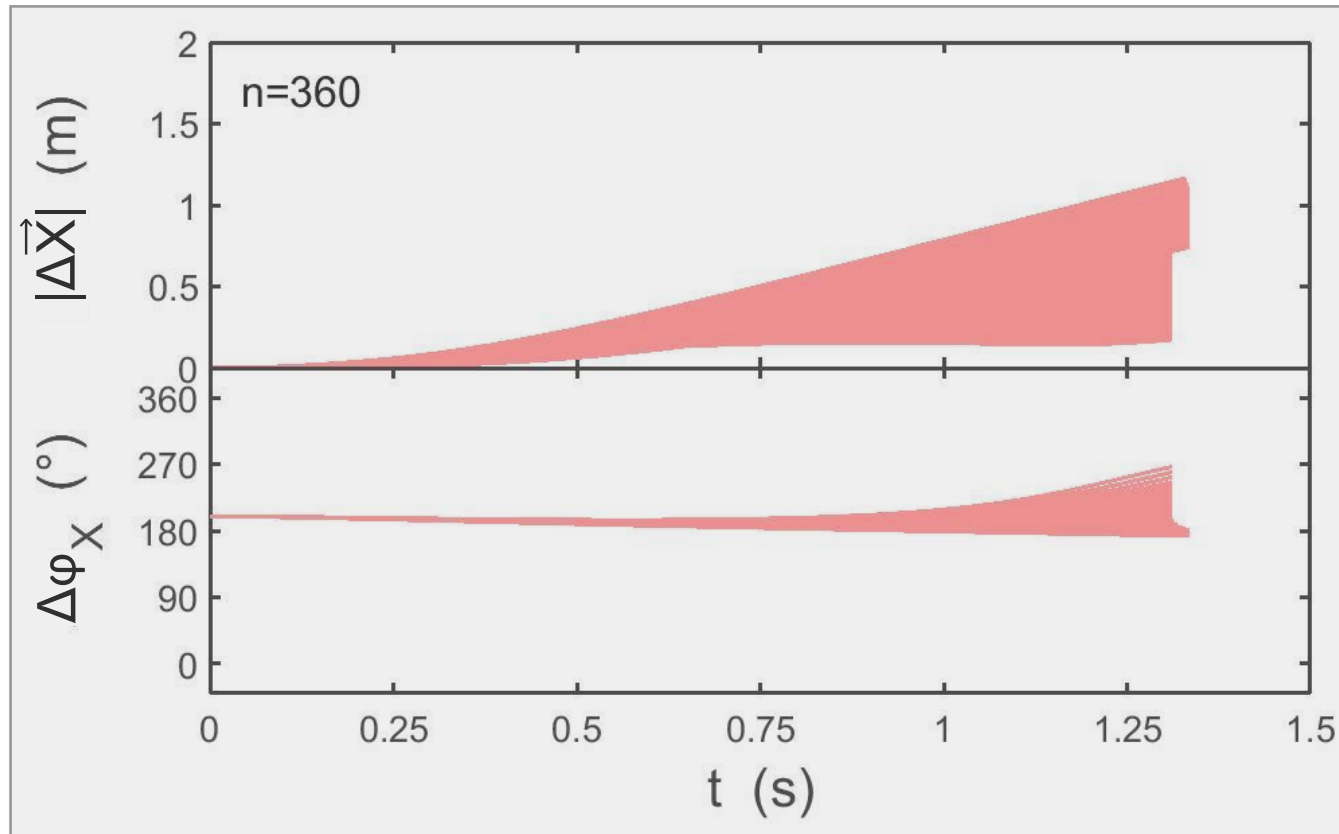


$|\Delta\vec{X}|(t)$ -, $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe für ausgewählte (142) Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes der C_w -Unsicherheitsquelle, wofür sich $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe, die Punkte $(t, 0^\circ \leq \Delta\phi_X < 90^\circ)$, $(t, 270^\circ < \Delta\phi_X \leq 360^\circ)$ berücksichtigen und keine Punkte $(t, \Delta\phi_X = 90^\circ)$, $(t, \Delta\phi_X = 270^\circ)$ enthalten, ergeben (links) sowie Anteil des auftretenden $\Delta\phi_X(t)$ -Bereichs am Vollwinkel (unten)

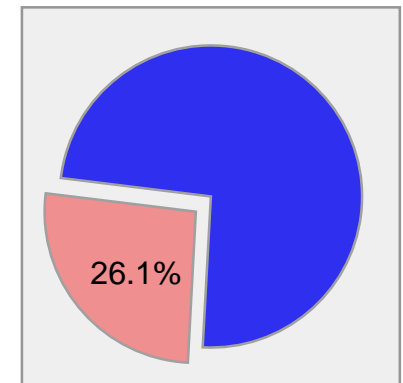


Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

γ -Komponente ($|\Delta\vec{X}|$ und $\Delta\varphi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\varphi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung)

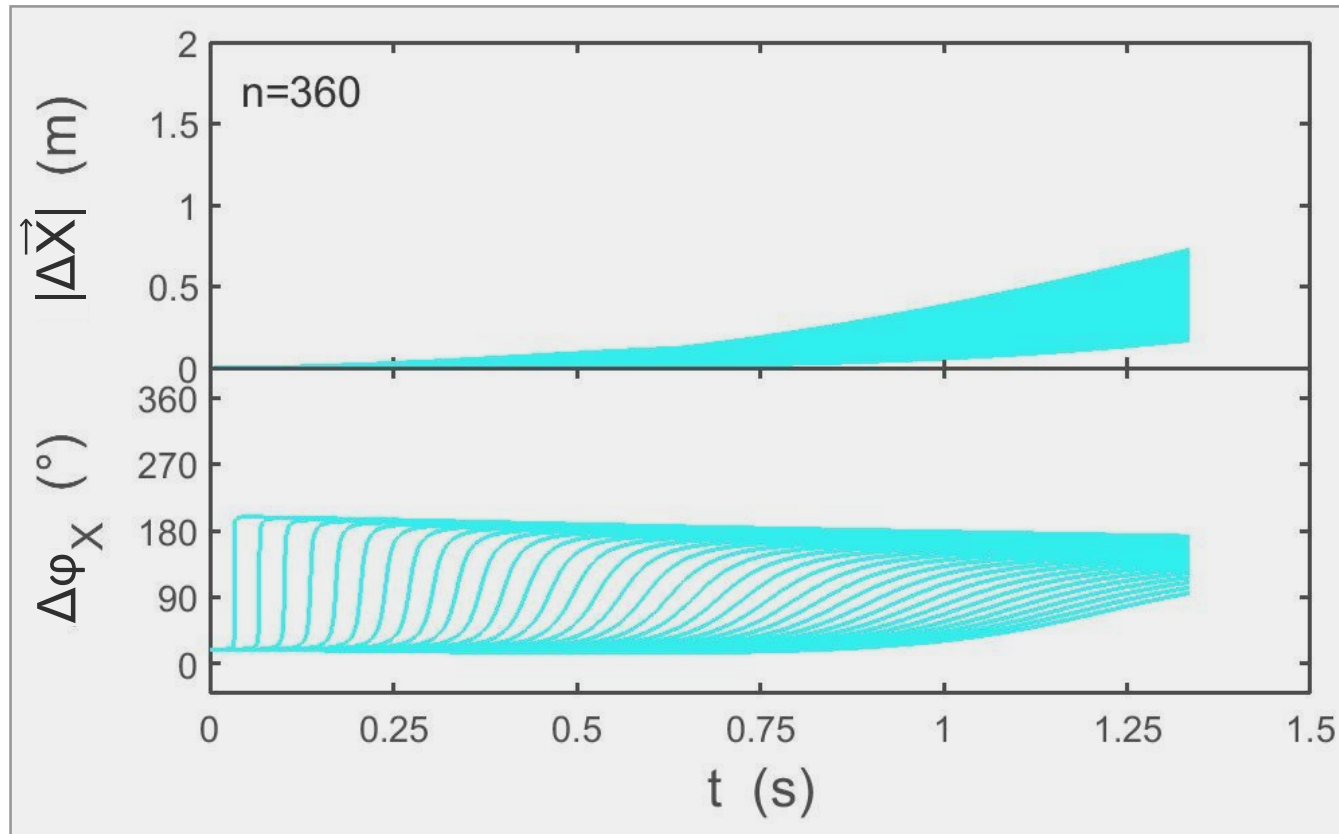


$|\Delta\vec{X}|(t)$ -, $\Delta\varphi_X(t)$ -Verläufe für ausgewählte (143) Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes der C_w -Unsicherheitsquelle, wofür sich $\Delta\varphi_X(t)$ -Verläufe, die Punkte $(t, 90^\circ < \Delta\varphi_X < 270^\circ)$ berücksichtigen und keine Punkte $(t, \Delta\varphi_X = 90^\circ)$, $(t, \Delta\varphi_X = 270^\circ)$ enthalten, ergeben (links) sowie Anteil des auftretenden $\Delta\varphi_X(t)$ -Bereichs am Vollwinkel (unten)

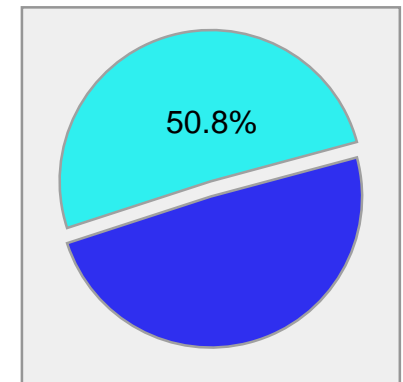


Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

γ -Komponente ($|\Delta\vec{X}|$ und $\Delta\phi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\phi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung)

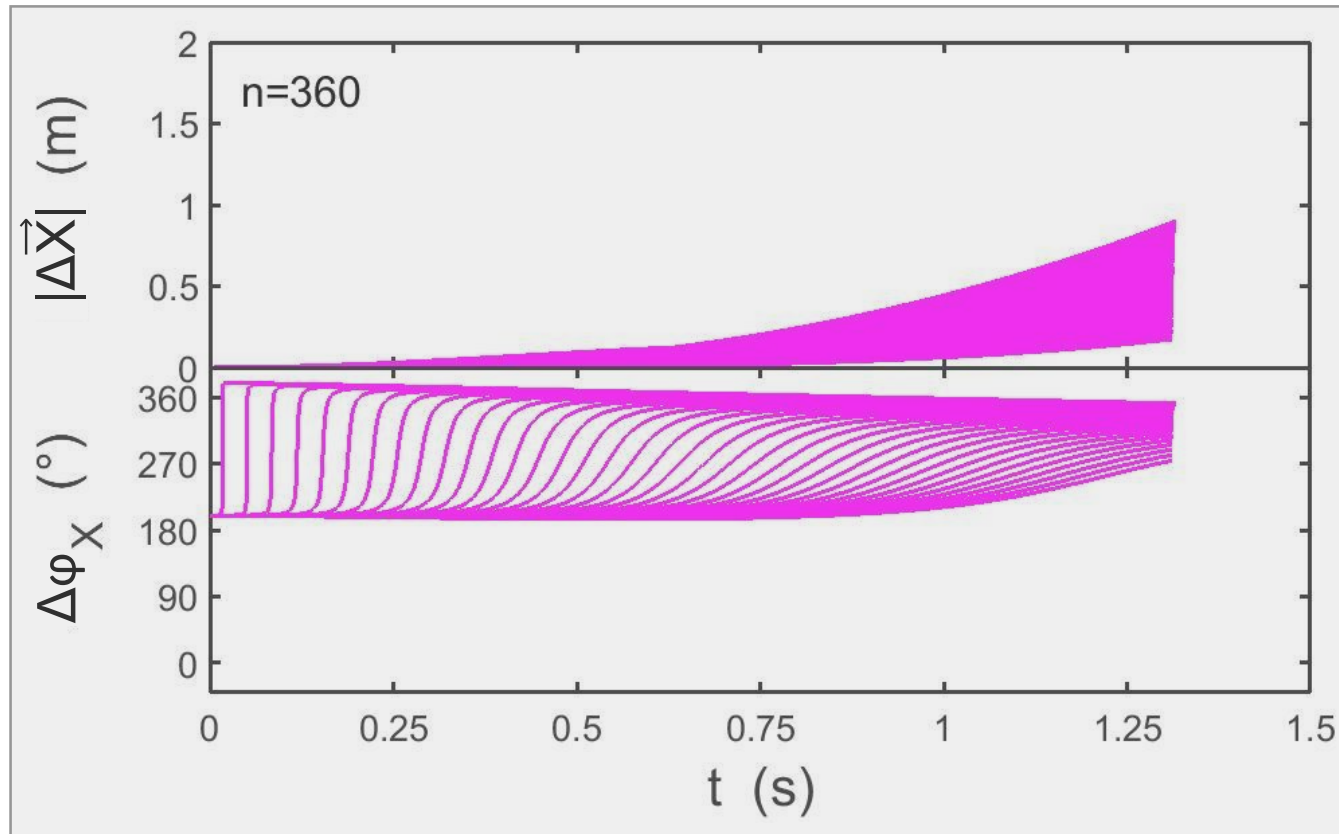


$|\Delta\vec{X}|(t)$ -, $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe für ausgewählte (37) Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes der C_w -Unsicherheitsquelle, wofür sich $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe, die Punkte $(t, \Delta\phi_X=90^\circ)$ enthalten, ergeben (links) sowie Anteil des auftretenden $\Delta\phi_X(t)$ -Bereichs am Vollwinkel (unten)

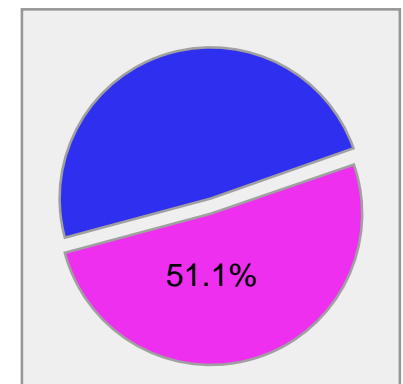


Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

γ -Komponente ($|\Delta\vec{X}|$ und $\Delta\phi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\phi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung)

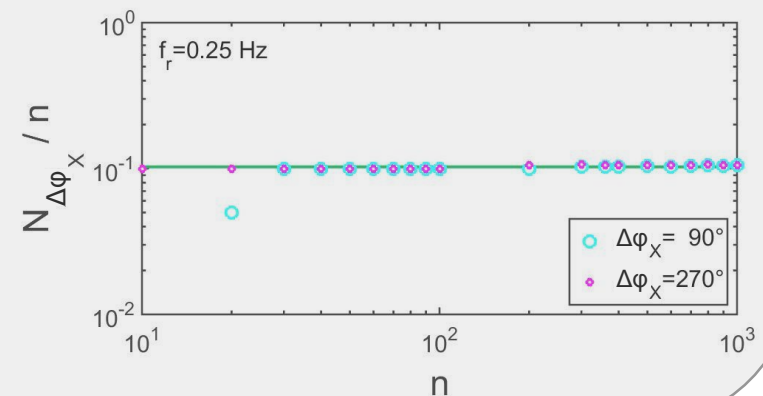
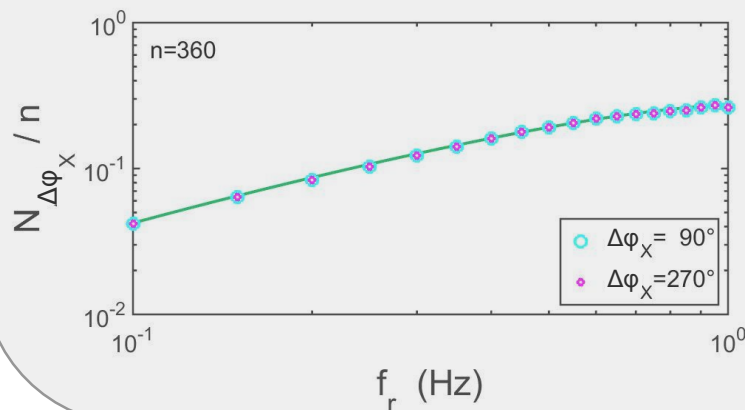
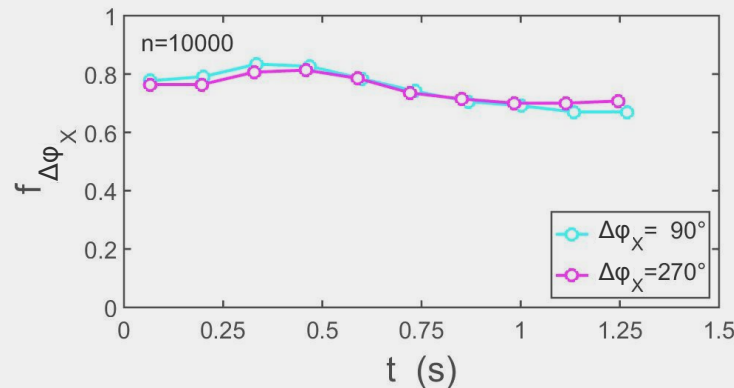


$|\Delta\vec{X}|(t)$ -, $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe für ausgewählte (38) Ereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes der C_w -Unsicherheitsquelle, wofür sich $\Delta\phi_X(t)$ -Verläufe, die Punkte $(t, \Delta\phi_X=270^\circ)$ enthalten, ergeben (links) sowie Anteil des auftretenden $\Delta\phi_X(t)$ -Bereichs am Vollwinkel (unten)



Ergebnisse: Quantifizierung von Unsicherheitsfortpflanzung (γ -Unsicherheitsquantifizierung) (Modell #3)

γ -Komponente ($|\Delta X|$ und $\Delta\phi_X$) im räuml.-zeitl. Bezug – Unterscheidung nach $\Delta\phi_X(t)$ -Kurveigenschaften (ereignisanalytische Klassifizierung) und Folgerungen



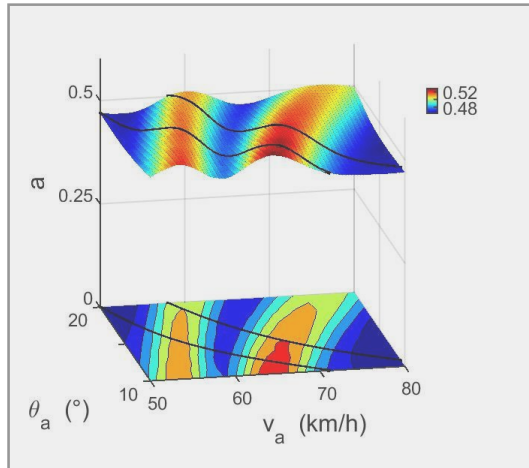
$f_{\Delta\phi_X}$ – Dichtefunktion der $\Delta\phi_X$ -Verteilung, $N_{\Delta\phi_X}$ – Anzahl des Auftretens von $\Delta\phi_X$ ¹³⁾

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 15/28

¹³⁾ Da $\frac{\partial \Delta\phi_X}{\partial t}$ an Stellen mit $\Delta\phi_X=90^\circ$, $\Delta\phi_X=270^\circ$ vergleichsweise hohe Werte annimmt, lässt sich $(N_{90^\circ}+N_{270^\circ})/n$ als Auftrittswahrscheinlichkeit eines (Polar)winkel-spezifischen Flattereffektes interpretieren.

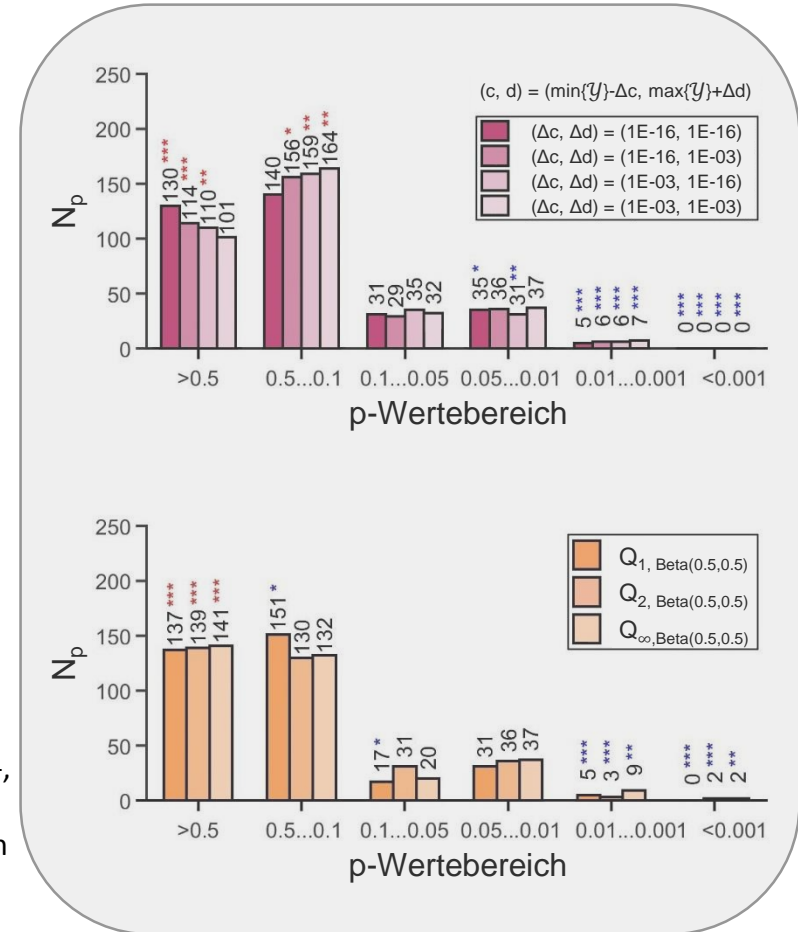
$\gamma(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter a ¹⁴ der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$. $E(\gamma)$ und $\text{Var}(\gamma)$ aus PCE-Analyse ($n = \binom{11}{10} \cdot 3$). (c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{\gamma\}, \max\{\gamma\})$ ([Riggs, 1989](#)).

Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



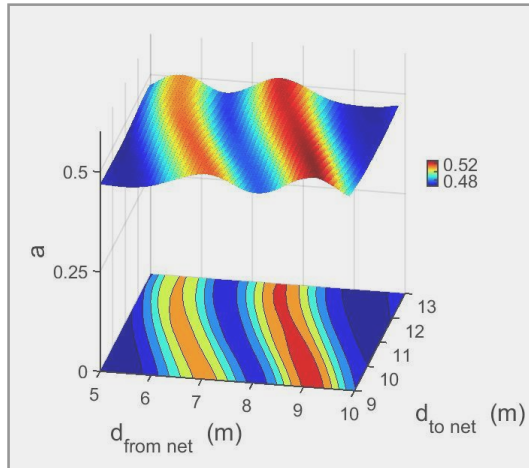
* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$$^{14} a = \frac{(E(\gamma) - c)^2 \cdot (d - E(\gamma))}{\text{Var}(\gamma) \cdot (d - c)} - \frac{E(\gamma) - c}{d - c}, \quad b = a \cdot \frac{d - E(\gamma)}{E(\gamma) - c}$$

(Nadarajah & Gupta, 2004)

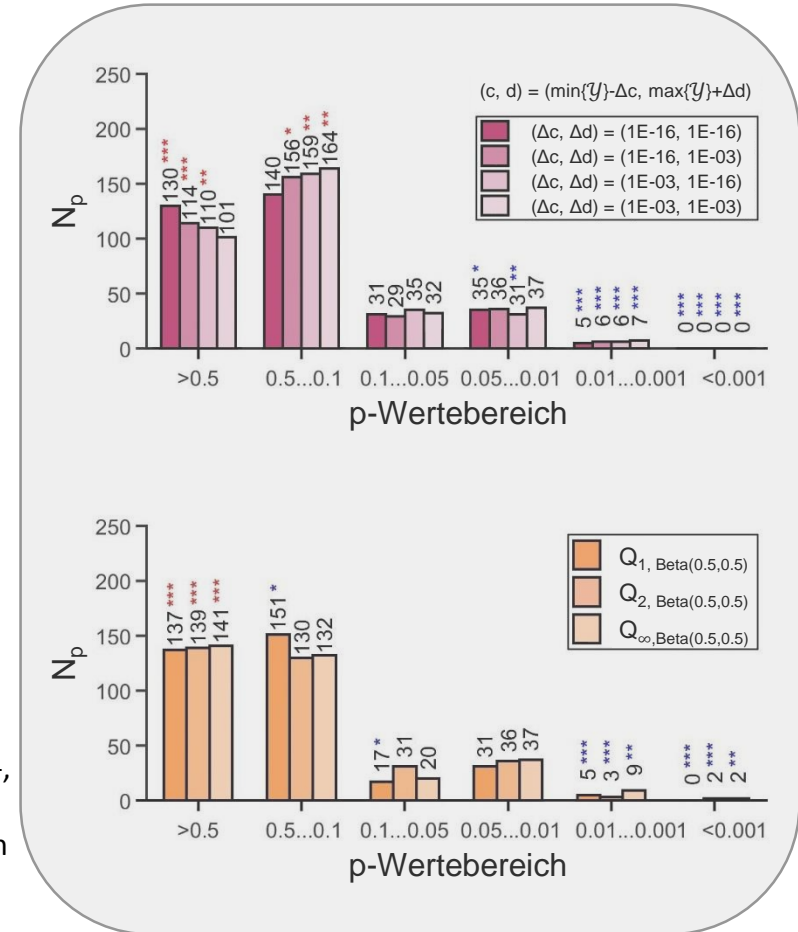
$\gamma(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter a ¹⁴ der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$. $E(\gamma)$ und $\text{Var}(\gamma)$ aus PCE-Analyse ($n = \binom{11}{10} \cdot 3$). (c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{\gamma\}, \max\{\gamma\})$ ([Riggs, 1989](#)).

Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



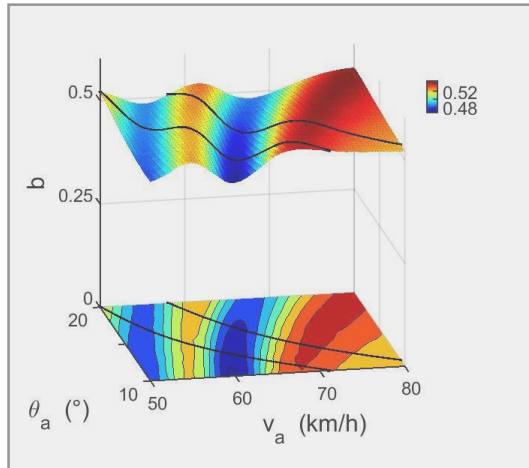
* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$$^{14)} a = \frac{(E(\gamma) - c)^2 \cdot (d - E(\gamma))}{\text{Var}(\gamma) \cdot (d - c)} - \frac{E(\gamma) - c}{d - c}, \quad b = a \cdot \frac{d - E(\gamma)}{E(\gamma) - c}$$

(Nadarajah & Gupta, 2004)

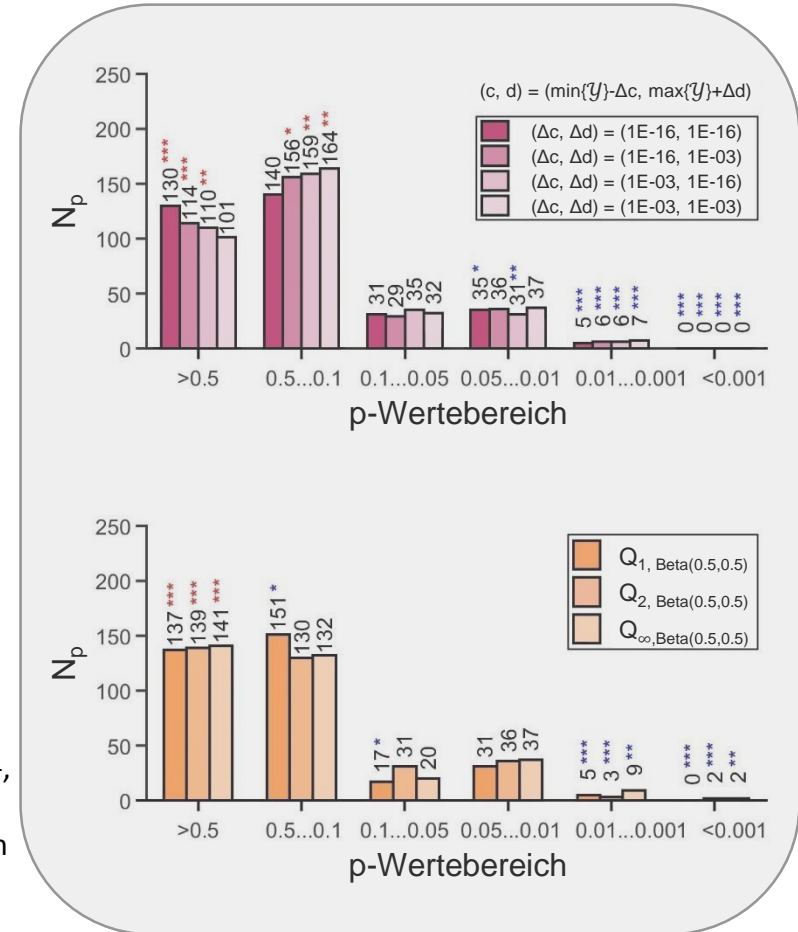
$\gamma(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter b ¹⁴ der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$. $E(\gamma)$ und $\text{Var}(\gamma)$ aus PCE-Analyse ($n = \binom{11}{10} \cdot 3$). (c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{\gamma\}, \max\{\gamma\})$ ([Riggs, 1989](#)).

Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



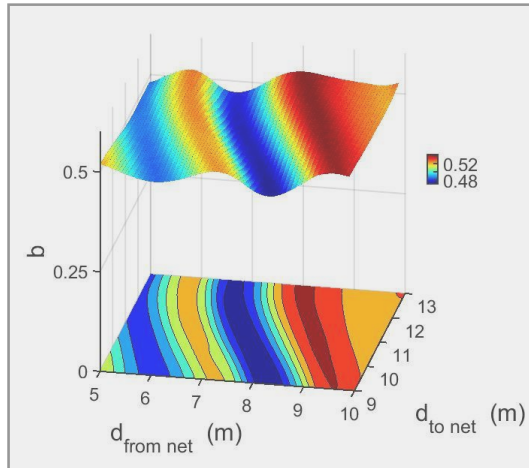
* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$$^{14)} a = \frac{(E(\gamma) - c)^2 \cdot (d - E(\gamma))}{\text{Var}(\gamma) \cdot (d - c)} - \frac{E(\gamma) - c}{d - c}, \quad b = a \cdot \frac{d - E(\gamma)}{E(\gamma) - c}$$

(Nadarajah & Gupta, 2004)

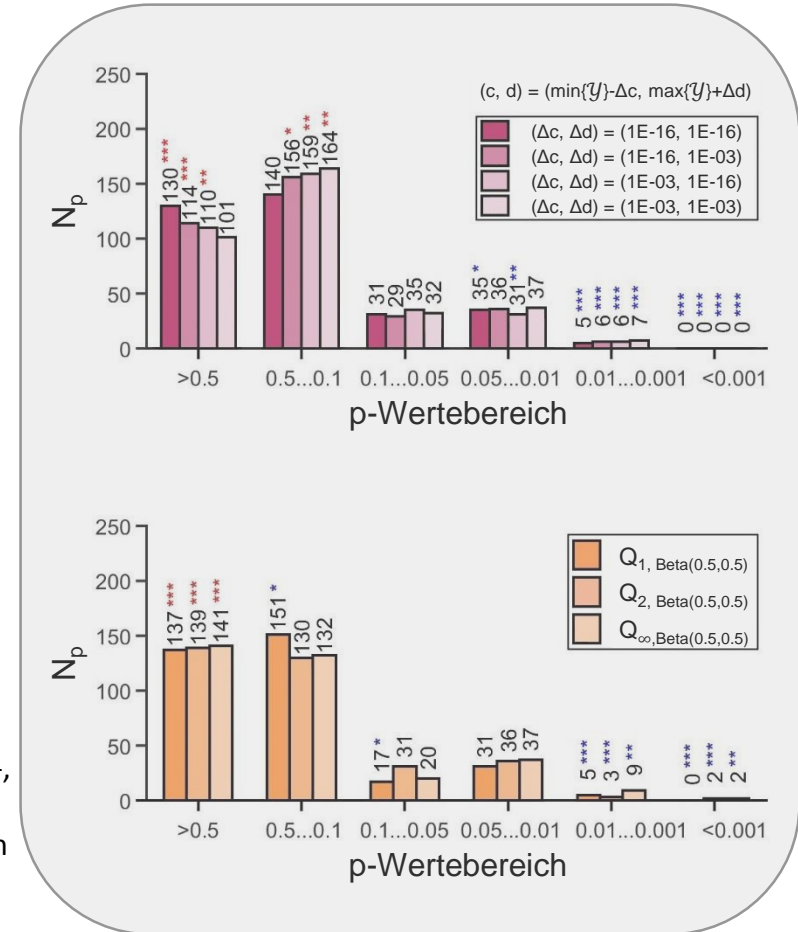
$\gamma(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter b ¹⁴ der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$. $E(\gamma)$ und $\text{Var}(\gamma)$ aus PCE-Analyse ($n = \binom{11}{10} \cdot 3$). (c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{\gamma\}, \max\{\gamma\})$ ([Riggs, 1989](#)).

Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



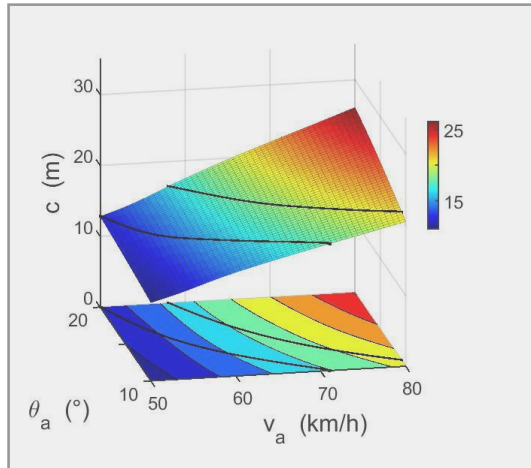
* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$$^{14)} a = \frac{(E(\gamma) - c)^2 \cdot (d - E(\gamma))}{\text{Var}(\gamma) \cdot (d - c)} - \frac{E(\gamma) - c}{d - c}, \quad b = a \cdot \frac{d - E(\gamma)}{E(\gamma) - c}$$

([Nadarajah & Gupta, 2004](#))

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

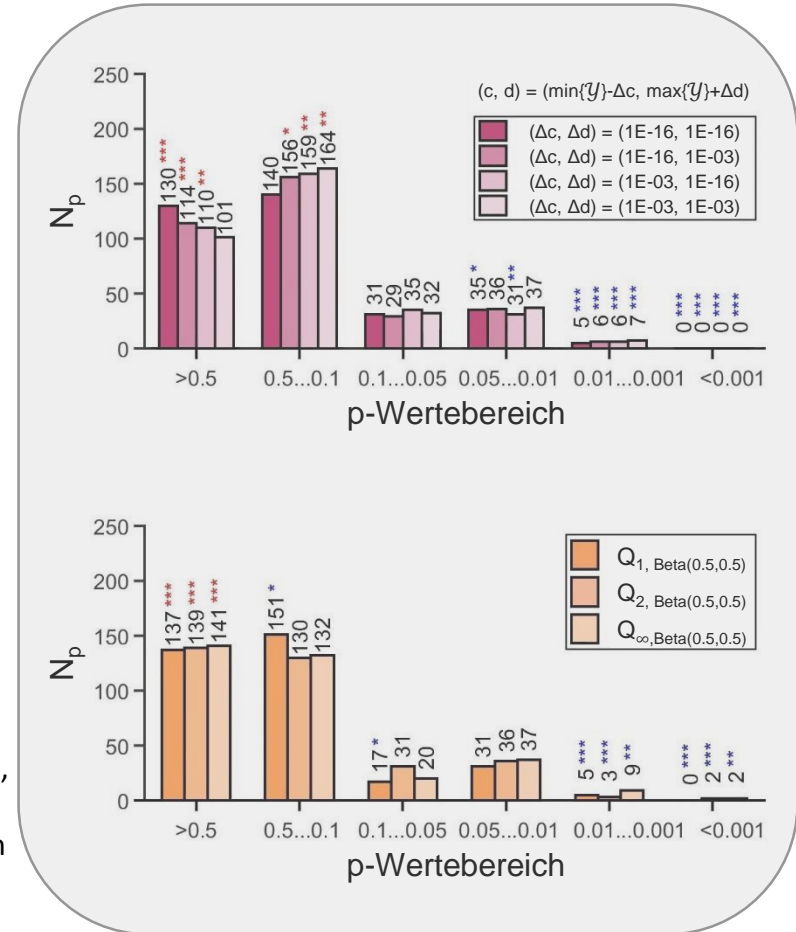
Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter c der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$.

(c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{Y\}, \max\{Y\})$ ([Riggs, 1989](#)).

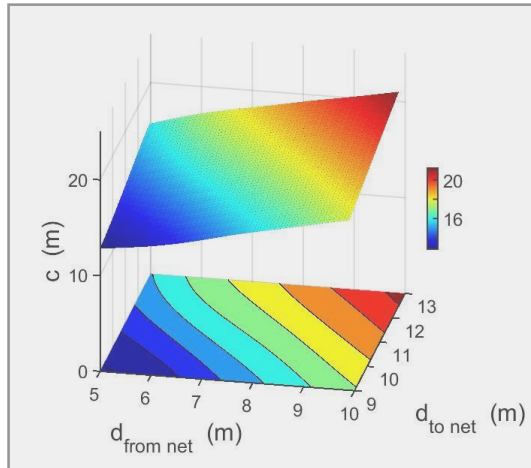
Anzahl N_p des Auftretens von p -Werten in einem jeweiligen p -Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

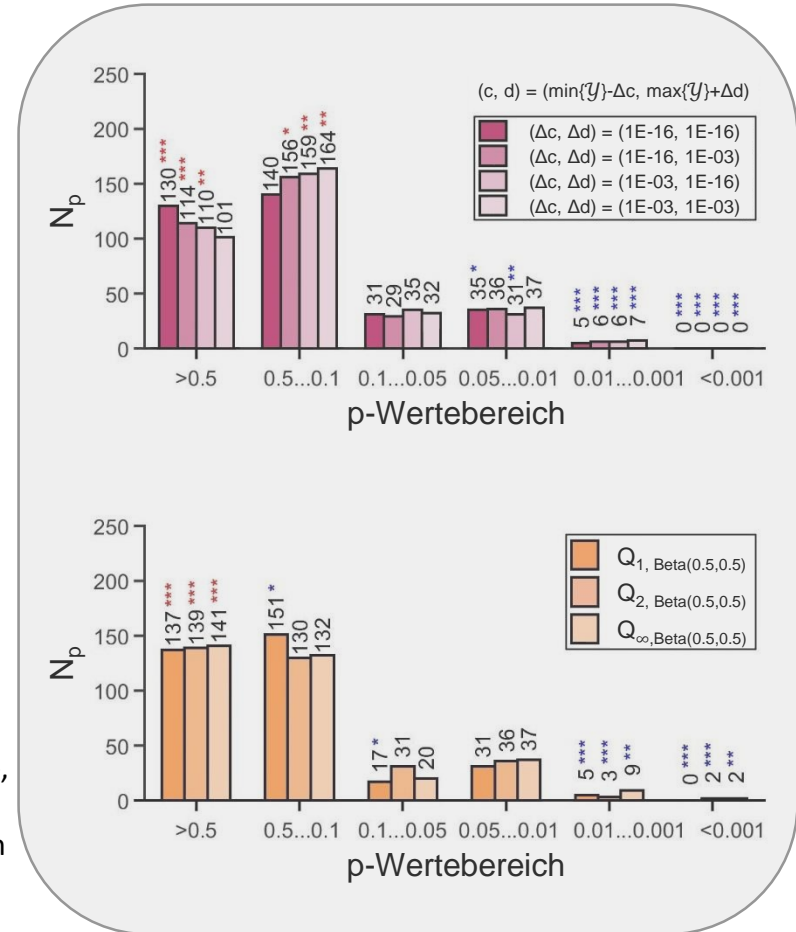
Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter c der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$.

(c, d) -Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) ($n=360$) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{Y\}, \max\{Y\})$ ([Riggs, 1989](#)).

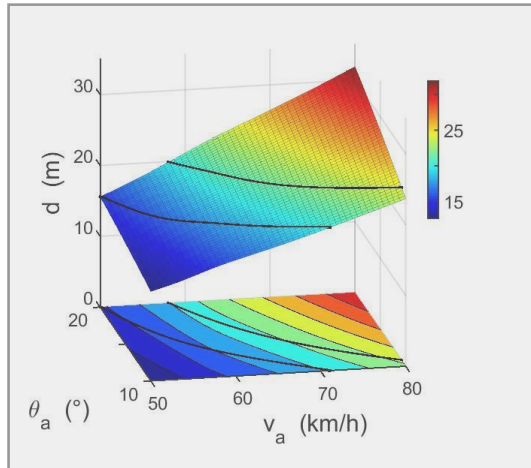
Anzahl N_p des Auftretens von p -Werten in einem jeweiligen p -Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b) -Schätzung siehe diese Folie).



* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

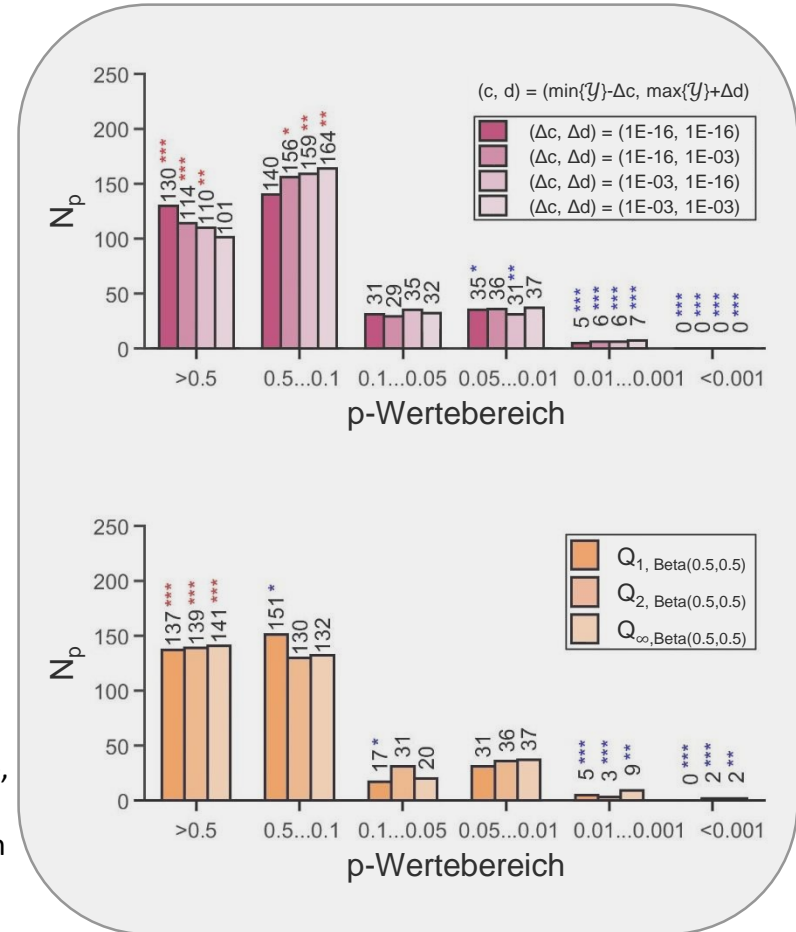
Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter d der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$.

(c, d)-Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach [AbouRizk, Halpin & Wilson \(1994\)](#) (n=360) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{Y\}, \max\{Y\})$ ([Riggs, 1989](#)).

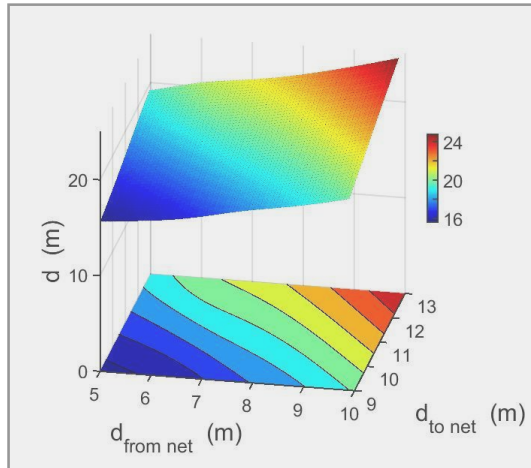
Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test ([Anderson & Darling, 1954](#)) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests ([Hill & Perez-Abreu, 2001](#)) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ (n=360). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b)-Schätzung siehe diese Folie).



* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

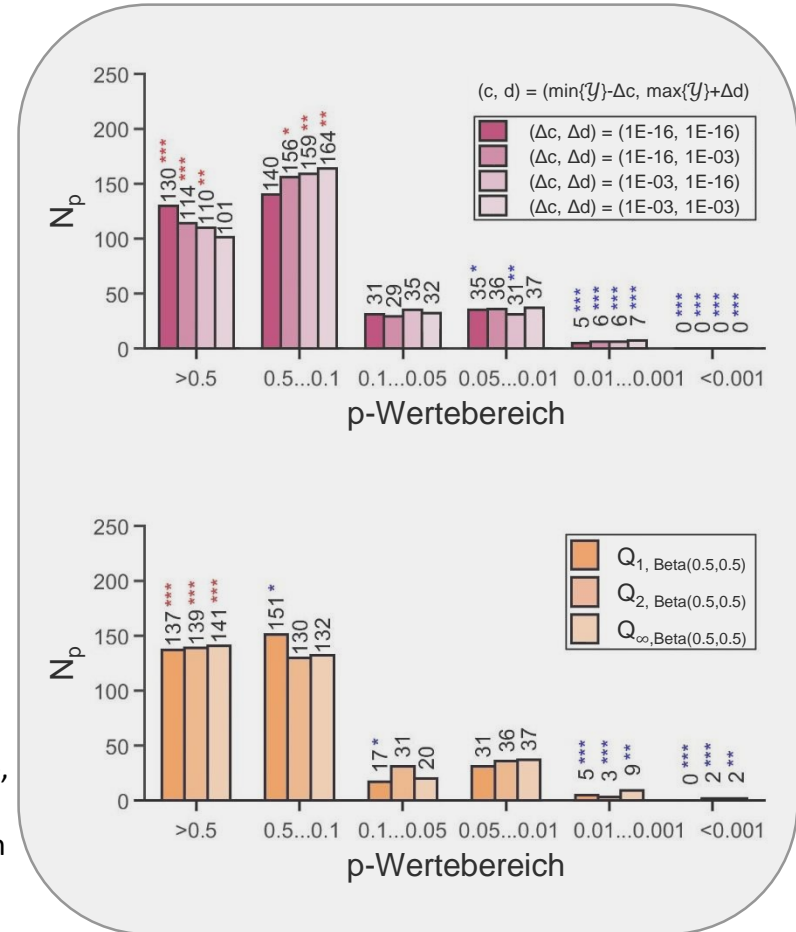
Ballauftreffort – $(x(X=\Phi_w))|_{t=t_e} \sim \text{Beta}(c,d,a,b)$, $c \leq x \leq d$



Parameter d der allg. Betaverteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$.

(c, d)-Schätzung mittels 4-Parameter-Nelder-Mead Anpassung der Verteilungsfunktion für Randgewichtungen nach **AbouRizk, Halpin & Wilson (1994)** (n=360) (**Methode I**) anstelle der Näherung $(c, d) \approx (\min\{Y\}, \max\{Y\})$ (**Riggs, 1989**).

Anzahl N_p des Auftretens von p-Werten in einem jeweiligen p-Wertebereich für verschiedene Anpassungstests: A^2 -Test (**Anderson & Darling, 1954**) (oben) und ein momentenbasierter Test am Beispiel des $Q_{p,F}$ -Tests (**Hill & Perez-Abreu, 2001**) (unten) auf $\text{Beta}(c,d,0.5,0.5)$ -Verteilung für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ (n=360). $1-\alpha$ -, α -Quantile $Q_{1-\alpha}$, Q_α ($\alpha=0.05, 0.01, 0.001$) ergeben sich aus 10000-facher Simulation des Szenarios unter Verwendung von $\text{Beta}(0,1,a',b')$ -verteilten Pseudozufallszahlen mit $(a', b') = (a, b)$ (für (a, b)-Schätzung siehe diese Folie).



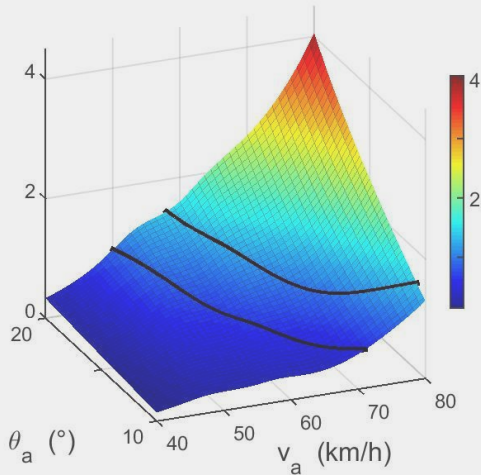
* $N_p > Q_{0.95}$, ** $N_p > Q_{0.99}$, *** $N_p > Q_{0.999}$,
* $Q_{0.01} < N_p < Q_{0.05}$, ** $Q_{0.001} < N_p < Q_{0.01}$, *** $N_p < Q_{0.001}$

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Ballauftreffort (a)

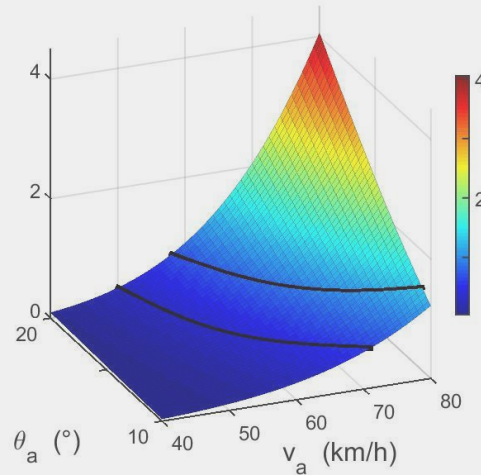
$r_0=0.97$

$$\text{Var}(x|t=t_e) \text{ (m}^2\text{)}$$



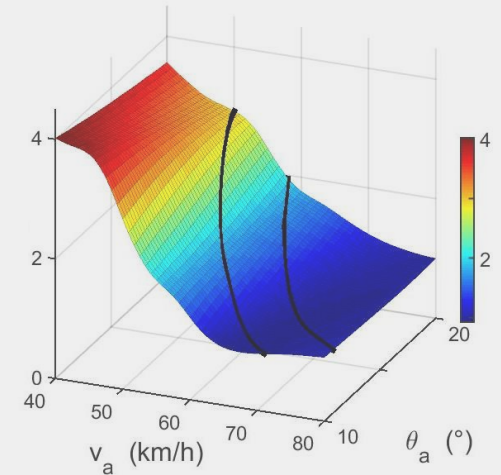
$$\bar{C}_w = f(v)$$

$r_1=0.94$ ¹⁵⁾



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$r_1=0.87$ ¹⁵⁾



Kalibrierung ¹⁶⁾

¹⁵⁾ Korrelation zwischen (formelmäßig) angegebener Größe und Ballflugzeit t_e^{CW}

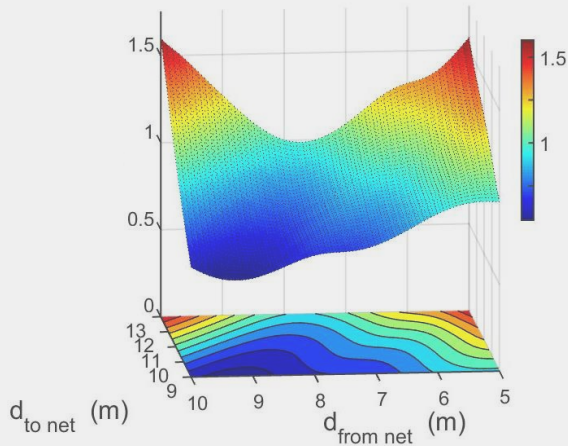
¹⁶⁾ Quotientenbildung der nach $\bar{C}_w(v)$ -Abhängigkeiten unterschiedenen Werte der (formelmäßig) angegebenen Größe

$y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

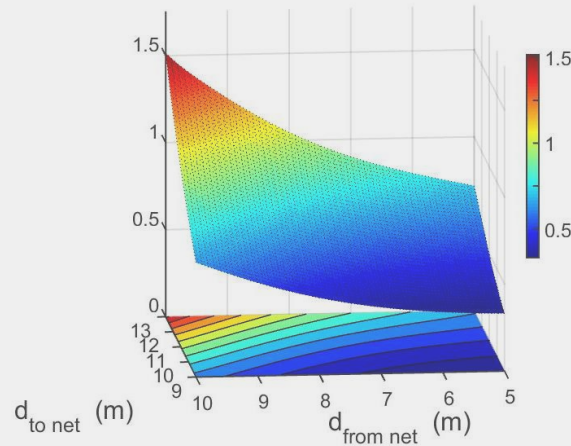
Ballauftreffort (b)

$$r_0=0.37$$

$$\text{Var}(x|t=t_e) \text{ (m}^2\text{)}$$



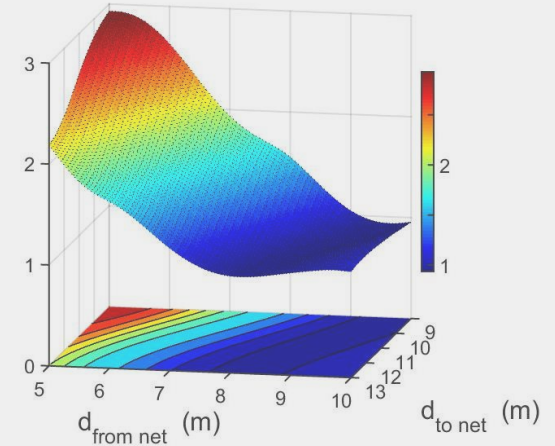
$$\bar{C}_W = f(v)$$



$$\bar{C}_W = \text{const.}$$

$$r_1=0.70$$

$$r_1=-0.22$$



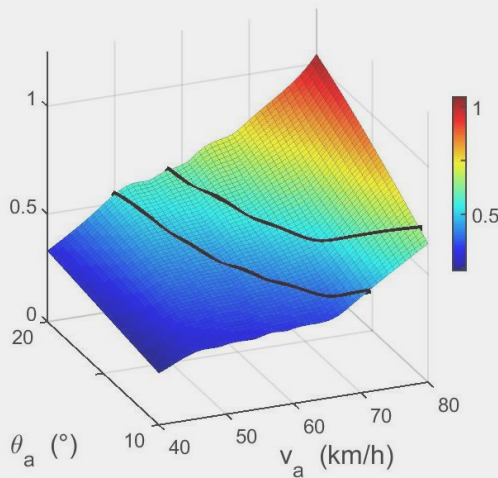
Kalibrierung

y(t)-Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Betrag Ortsvektor (I-a)

$$r_0=0.96$$

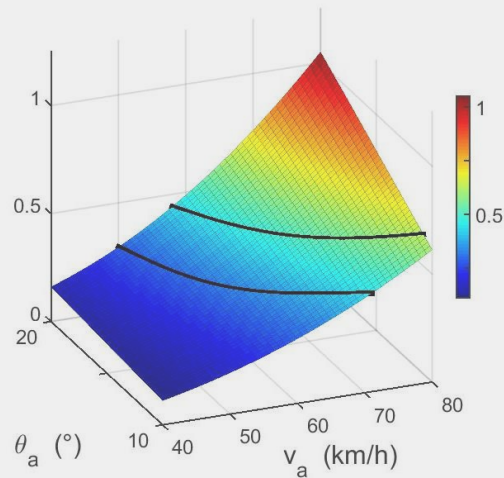
$$\frac{1}{t_e^{cw}} \cdot \int_0^{t_e^{cw}} \max(|\vec{X} - \vec{X}^{cw}|) \cdot dt \quad (m) \quad 17)$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$r_1=0.94$$

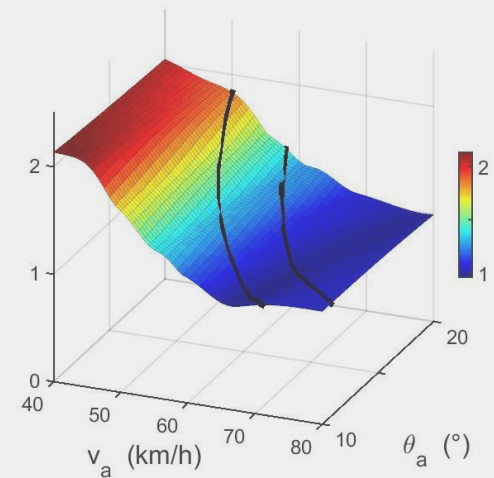
$$r_2=0.99 \quad 18)$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$r_1=0.87$$

$$r_2=0.99 \quad 18)$$



Kalibrierung



Technische
Universität
Braunschweig

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 19/28

Varianz

17) vgl. auch kovarianzbasierte Trajektorienmodelle in
in Anlehnung an Cootes et al. (1995)

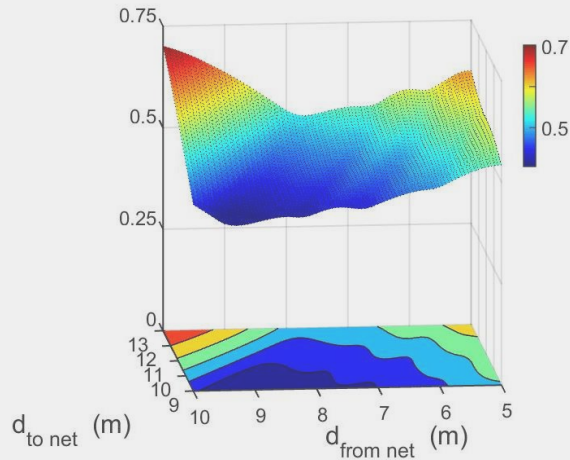
18) Korrelation zwischen formelmäßig angegebener Größe und
 $\sqrt{(\sum_i \lambda_i) / N}$ ($\Delta t=1$ ms, $n=37$)

y(t)-Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Betrag Ortsvektor (I-b)

$$r_0=0.51$$

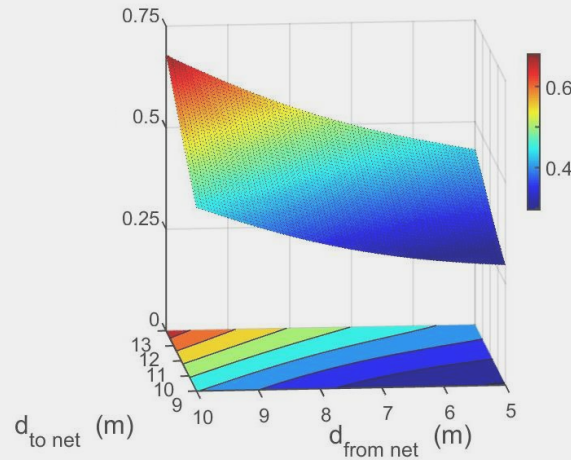
$$\frac{1}{t_e^{cw}} \cdot \int_0^{t_e^{cw}} \max(|\vec{X} - \vec{X}^{cw}|) \cdot dt \quad (m)$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$r_1=0.43$$

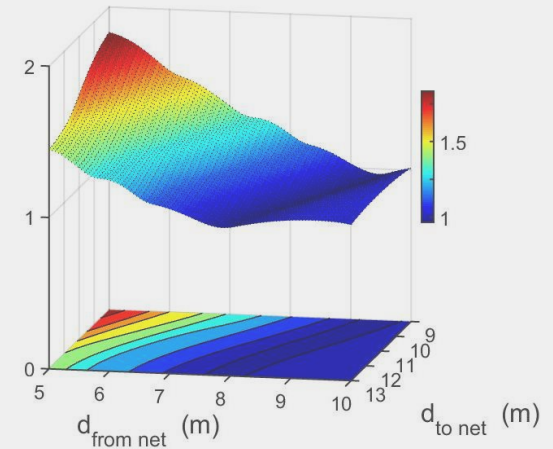
$$r_2=0.97$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$r_1=-0.31$$

$$r_2=0.99$$



Kalibrierung

y(t)-Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Betrag Ortsvektor (II)

Hypothesen-Test unter Verwendung von deformierten Trajektorien

$$\vec{\tau}_k - \vec{\tau}^{cw} = \mathbf{S} \cdot \vec{B}_k$$

$$\vec{\tau}_k = [|\vec{X}_k(\Delta t)|, \dots, |\vec{X}_k(N \cdot \Delta t)|]^T$$

$$\vec{\tau}^{cw} = [|\vec{X}^{cw}(\Delta t)|, \dots, |\vec{X}^{cw}(N \cdot \Delta t)|]^T$$

quadrierte Mahalanobis-Distanz zur k-ten Trajektorie:

$$D_k^2 = \vec{B}_k^T \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \vec{B}_k$$

$$\tilde{D}_k^2 = \sum_i^{N_{PCA}} (\tilde{b}_i^k)^2 / \lambda_i$$

$$H_0: \tilde{D}_k^2 \leq T_{\alpha, N_{PCA}, n}^2$$

$(\tilde{b}_i^k / \sqrt{\lambda_i} \text{ normalverteilt})$

PCA

$$\mathbf{S} \rightarrow \tilde{\mathbf{S}} \quad (\mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N_{PCA}})$$

$$\vec{B}_k \rightarrow \tilde{\vec{B}}_k \quad (\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_{PCA}})$$

$$\tilde{\vec{B}}_k = \left\{ \tilde{\vec{B}}_k^* \mid \min_{\tilde{\vec{B}}_k^*} |\vec{\tau}_k - \vec{\tau}^{cw} - \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\vec{B}}_k^*| \right\}$$

Ausreißer

\vec{B}_k – Vektor mit Deformationskoeffizienten b_i^k für k-te Trajektorie ($i=1,2,\dots,N$), N_{PCA} – Anzahl relevanter Komponenten in PCA, \mathbf{S} – Eigenvektormatrix von $\text{Cov}(|\vec{X}|)$, T^2 – Prüfgröße der Hotellingschen T-Quadrat-Verteilung, α – Irrtumswahrscheinlichkeit, $\mathbf{\Lambda}$ – Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie 21/28

vgl. auch kovarianzbasierte Trajektorienmodelle in
in Anlehnung an Cootes et al. (1995)

Varianz

$$\sqrt{(\sum_i \lambda_i) / N}$$

10/11/2016



Technische
Universität
Braunschweig

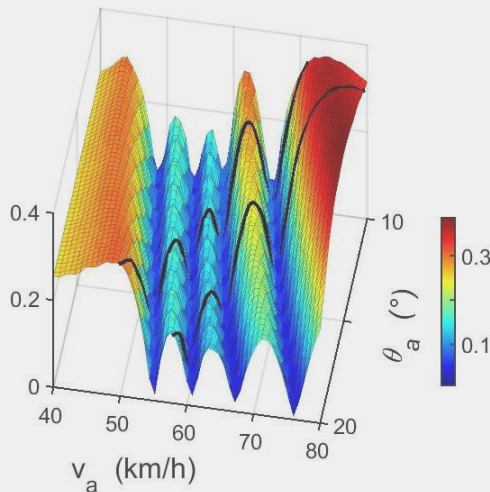
$y(t)$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Betrag Ortsvektor (II-a) ($N_{PCA}=1$) ¹⁹⁾

$$r_0 = -0.03$$

$$1-d \leftarrow \alpha$$

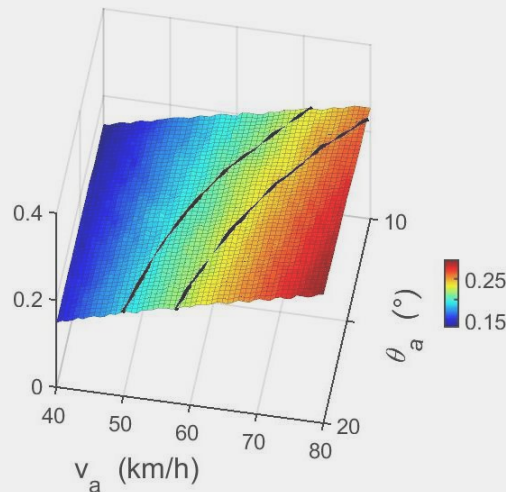
$$1-d$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$r_1 = -0.17$$

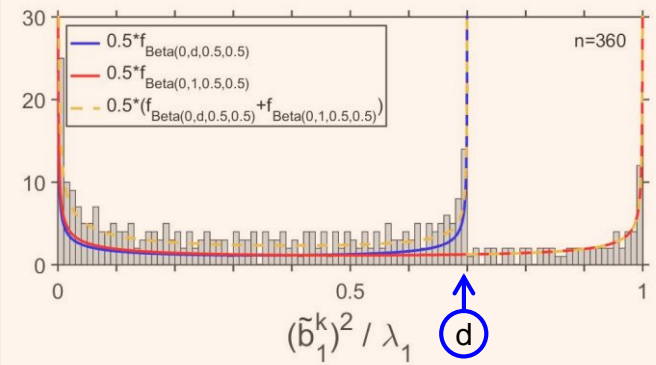
$$r_2 = -0.07$$



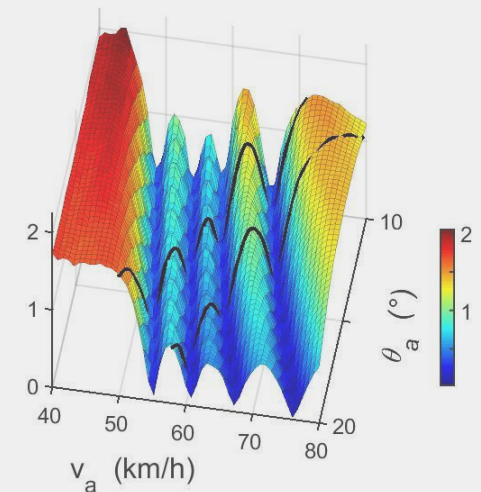
$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$r_1 = 0.82$$

$$r_2 = 0.91$$



Beispiel einer auf das Intervall $[0, 1]$ reskalierten typischen Verteilung von $(\tilde{b}_1^k)^2 / \lambda_1$



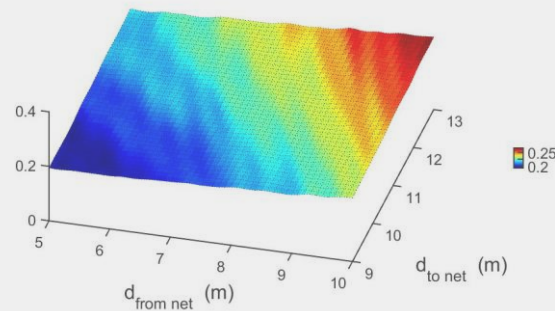
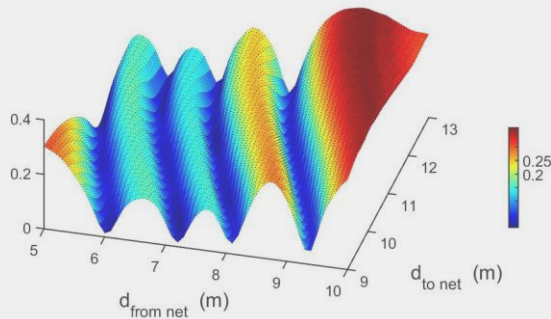
Kalibrierung

$y(t)$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Betrag Ortsvektor (II-b) ($N_{PCA}=1$)

$$r_0=0.64$$

$$1 - d$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

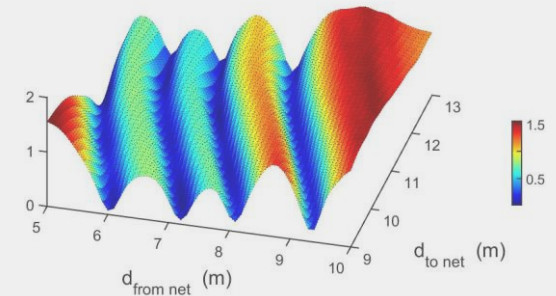
$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$r_1 = -0.48$$

$$r_2 = 0.05$$

$$r_1 = -0.12$$

$$r_2 = 0.97$$



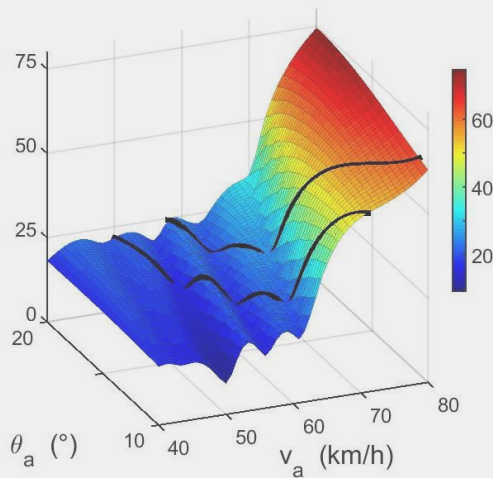
Kalibrierung

$y(t)$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Leistung (a)

$$r_0=0.98$$

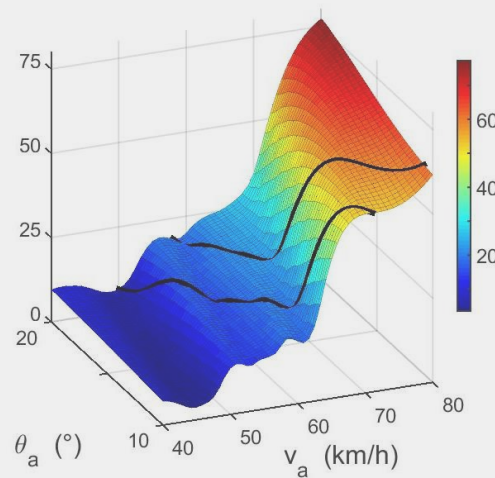
$$\frac{1}{t_e^{cw}} \cdot \int_0^{t_e^{cw}} \max(|P - P^{cw}|) \cdot dt \quad (W)$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$r_1=0.58$$

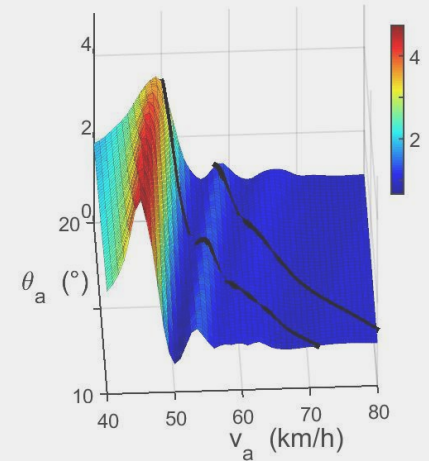
$$r_2=0.97$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$r_1=0.63$$

$$r_2=0.98$$



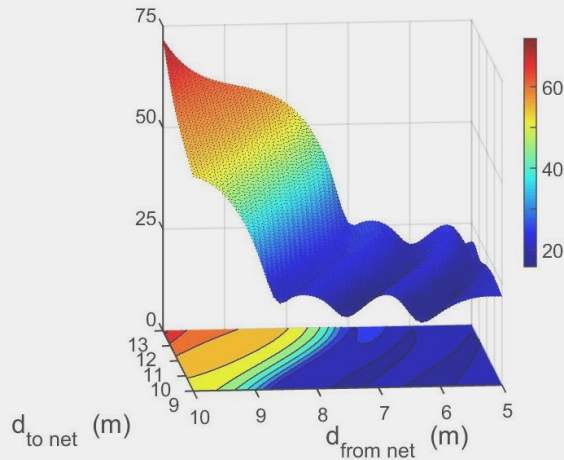
Kalibrierung

$y(t)$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Leistung (b)

$$r_0=0.99$$

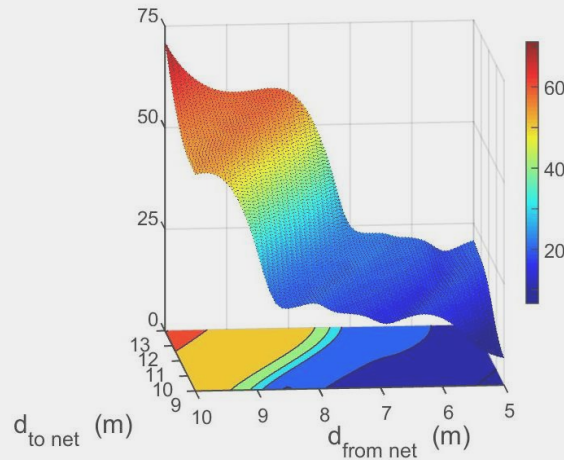
$$\frac{1}{t_e^{cw}} \cdot \int_0^{t_e^{cw}} \max(|P - P^{cw}|) \cdot dt \quad (W)$$



$$\bar{C}_W = f(v)$$

$$r_1 = -0.84$$

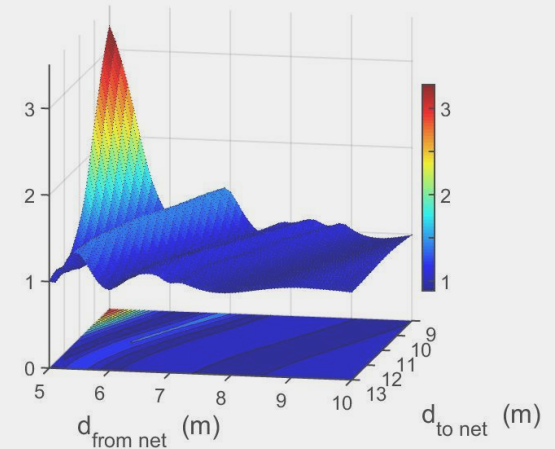
$$r_2 = 0.99$$



$$\bar{C}_W = \text{const.}$$

$$r_1 = -0.86$$

$$r_2 = 0.99$$



Kalibrierung

Numerische Untersuchungen von raum- / raum-zeitbezogener globaler Unsicherheitsquantifizierung des Fluges eines nichtrotierenden Volleyballs zeigen einen deutlichen Einfluss von Positionsdaten bzw. Anfangswerten relevanter kinematischer Variablen:

- $(v_a, \theta_a) \uparrow \rightarrow \text{globaler Flattereffekt}^{20)} \uparrow$
(\Rightarrow „Trichtereffekt“)
- $(v_a, \theta_a) \downarrow \rightarrow \text{globaler Beiwert-spezifischer Flattereffekt}^{21)} \uparrow$
(\Rightarrow „globales effektives Flattern“ für kurze Ballflugwege)

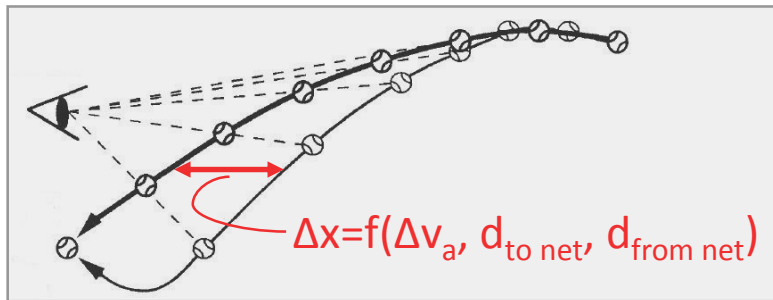
²⁰⁾ Zur Charakterisierung des *globalen Flattereffektes* wurden v.a. herangezogen – wie vorangehenden Folien zu entnehmen – die Varianz des Ballauftreffortes oder ein zeitgemittelter maximaler Abstand von cw-Wert und pseudo-zufälligem Wert spezifischer Größen (Betrag Ortsvektor, Leistung).

²¹⁾ Der eingeführte *globale Beiwert-spezifische Flattereffekt* beruht auf einer Kalibrierung der Simulations-Ergebnisse mit Ergebnissen aus Re-Simulationen (geschwindigkeitsunabhängiger aerodynamischer Beiwert)

Zusammenfassung – Schlussfolgerungen – Ausblick (Fortsetzung (1))

Modellanwendung: Untersuchungen zum Einfluss von Positionsdaten in leistungslimitierten visuellen Beurteilungen des Ballflugs

- Sensitivitätsanalyse in einer geschwindigkeitsbedingten perzeptuellen **Trajektorienillusion**

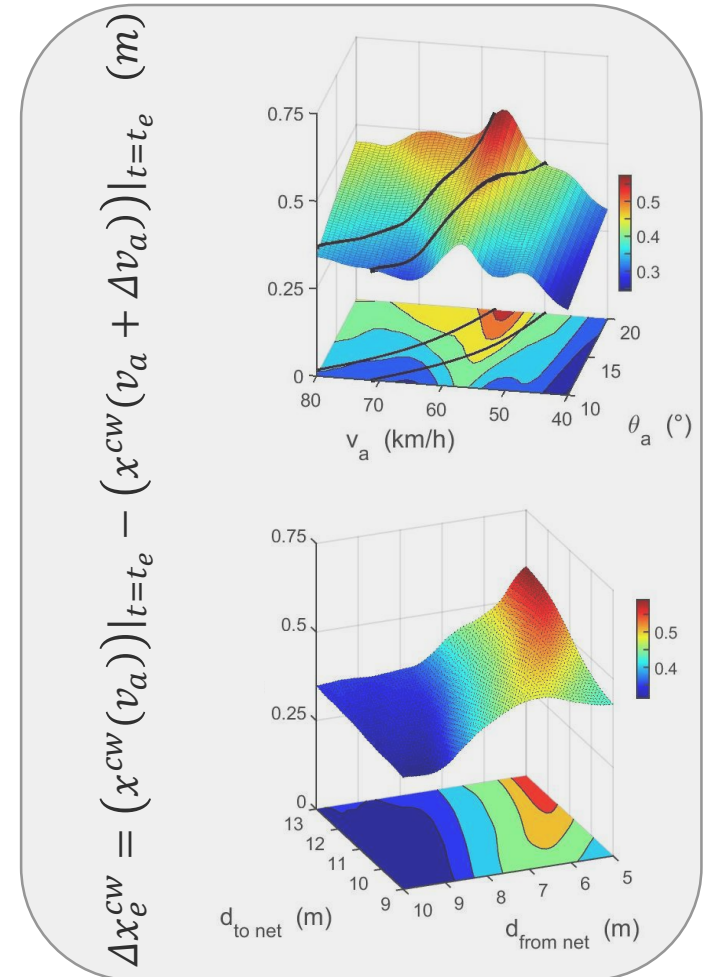


Tatsächliche Trajektorie des Ballflugs (oben) und Trajektorie für Unterschätzung von v_a um Δv_a (unten) (modifiziert nach McBeath, 1990).

Δx_e^{CW} (m)	Δz_e^{CW} (m)	$\Delta \theta_e^{CW}$ (°) ²²⁾
0.41 ± 0.07	0.07 ± 0.02	0.31 ± 0.18

Ergebnisse einer cw-Sensitivitätsanalyse (Modell #3). Werteänderungen (MD±SD) von Variablen zur Charakterisierung der Ballfluglandung für eine Änderung $\Delta v_a = -1$ km/h. Positionsdatenbereich:

$(d_{to\ net}, d_{from\ net}) = (9 \dots 13, 5 \dots 10)$ m.



$$^{22)} \Delta \theta_e^{CW} = \arctan \left(\frac{-v_z^{CW}(v_a + \Delta v_a)}{v_x^{CW}(v_a + \Delta v_a)} \right) \Big|_{t=t_e} - \arctan \left(\frac{-v_z^{CW}(v_a)}{v_x^{CW}(v_a)} \right) \Big|_{t=t_e}$$

Modellanwendung: Untersuchungen zum Einfluss von Positionsdaten in leistungslimitierten visuellen Beurteilungen des Ballflugs

- in Anlehnung an aktuelle sportinformatische Tendenzen (Liwei, 2012; Qiu, Hu & Luo, 2013) und die Simulation eines rotierenden Spielballs (Magnus-Effekt) (u.a. Hoinville et al., 2011) ergänzend: Trajektorien-Simulation eines nichtrotierenden Volleyballs in **Virtual Reality-Technologie** basierten Untersuchungen
- nicht-empirische raum-zeitbezogene Schätzung **psycho-physikalischer Größen**, z.B. Kontaktzeitschätzungen (für eine fachübergreifende Übersicht anhand einer Begriffsbestimmung zum „time to collision“-Paradigma siehe Carstengerdes, 2007, S. 38 ff.)

Zitierte Literatur

- Anderson, T. W. & Darling, D. A. (1954). A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 49 (268), 765-769.
- AbouRizk, S. M., Halpin, D., W. & Wilson, J. R. (1994). Fitting beta distributions based on sample data. *Journal of Construction Engineering and Management*, 120 (2), 288-305.
- Asai, T., Ito, S., Seo, K. & Hitotsubashi, A. (2010). Aerodynamics of a new volleyball. *Procedia Engineering*, 2 (2), 2493-2498.
- Benerink, N. H., Bootsma, R. J. & Zaal, F. T. J. M. (2015). Different temporal bases for body and arm movements in volleyball serve reception. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 25 (5), 603-609.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (1))

- Blatman, G. (2009). *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis* (Doctoral thesis). Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France.
- Carstengerdes, N. (2007). *At a glance back everything is different – experimental studies of distance estimations with mirrors* (Doctoral thesis). Universität Trier, Trier, Germany.
- Casanova, R., Borg, O. & Bootsma, R. J. (2015). Perception of spin and the interception of curved football trajectories. *Journal of Sports Sciences*, 33 (17), 1822-1830.
- Cootes, T. F., Taylor, C. J., Cooper, D. H. & Graham, J. (1995). Active shape models – their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61 (1), 38-59.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (2))

- Craig, C. M., Berton, E., Rao, G., Fernandez, L. & Bootsma, R. J. (2006). Judging where a ball will go: the case of curved free kicks in football. *Naturwissenschaften*, 93 (2), 97-101.
- Craig, C. M., Goulon, C., Berton, E., Rao, G., Fernandez, L. & Bootsma, R. J. (2009). Optic variables used to judge future ball arrival position in expert and novice soccer players. *Attention, Perception & Psychophysics*, 71 (3), 515-522.
- Craig, C. M., Bastin, J. & Montagne, G. (2011). How information guides movement: intercepting curved free kicks in soccer. *Human Movement Science*, 30 (5), 931-941.
- de Meneses, Y. L., Roduit, P., Luisier, F. & Jacot, J. (2005). Trajectory analysis for sport and video surveillance. *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, 5 (3), 148-156.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (3))

- Dessing, J. C. & Craig, C. M. (2010). Bending it like Beckham: how to visually fool the goalkeeper. *PLoS One*, 5 (10), e13161.
- Hahn, G. J. & Shapiro, S. S. (1994). *Statistical models in engineering*. New York [u.a.]: Wiley.
- Haußer, F. & Luchko, Y. (2011). *Mathematische Modellierung mit MATLAB®*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Hill, T. P. & Perez-Abreu, V. (2001). Extreme-value moment goodness-of-fit tests. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53 (3), 543-551.
- Hoinville , T., Naceri, A., Ortiz, J., Bernier, E. & Chellali, R. (2011). Performances of experienced and novice sportball players in heading virtual spinning soccer balls. In M. Hirose, A. Majumder, B. Lok & D. Schmalstieg (Eds.), *Proceedings of the 2011 IEEE Virtual Reality Conference* (S. 83-86). Piscataway: IEEE.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (4))

- Kagan, D. & Nathan, A. M. (2014). Simplified models for the drag coefficient of a pitched baseball. *The Physics Teacher*, 52 (5), 278-280.
- Laumann, D. (2011). *Die Physik der Bananenflanke: Theoretisches Modell und Videoanalyse*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.
- Lithio, D. & Webb, E. (2006). Optimizing a volleyball serve. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 7 (2), 1-20.
- Liwei, L. (2012). Applications of computer virtual reality technology in modern sports. In J. Chen, F. Yu, W. Chen, Y. Lu & H. Long (Eds.), *Proceedings of the 2012 International Symposium on Information Science and Engineering* (S. 358-361). Piscataway: IEEE.
- McBeath, M. K. (1990). The rising fastball: baseball's impossible pitch. *Perception*, 19 (4), 545-552.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (5))

- Nadarajah, S. & Gupta, A. K. (2004). Generalizations and related univariate distributions. In A. K. Gupta & S. Nadarajah (Eds.), *Handbook of beta distribution and its applications* (S. 97-163). New York [u.a.]: Marcel Dekker.
- Nathan, A. M. (2012a). Analysis of knuckleball trajectories. *Procedia Engineering*, 34, 116-121.
- Nathan, A. M. (2012b). *Using pitch-tracking technology to uncover the mysteries of the knuckleball*. Manuskript eines Vortrages: 2nd Annual Saberseminar on Sabermetrics, Scouting, and the Science of Baseball. Boston, MA, 04.-05.08.2012. Zugriff am 14. Februar 2016 unter: baseball.physics.illinois.edu/ppt/NathanKnuckleballAnalysis.ppt.
- Novacek, K. (2012). *Observing wave propagation of a float serve on a volleyball* (Master's thesis). Wake Forest University Graduate School of Arts and Sciences, Winston-Salem, NC.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (6))

- Qiu, Y. H., Hu, K. & Luo, X. J. (2013). Application of computer virtual reality technology in modern sports. In M.-T. Wu & Y. Yang (Eds.), *Proceedings of the 2013 International Conference on Intelligent System Design and Engineering Applications* (S. 362-364). Piscataway: IEEE.
- Raschke, M. (2009). The biased transformation and its application in goodness-of-fit tests for the beta and gamma distribution. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 38 (9), 1870-1890.
- Raschke, M. (2011). Empirical behaviour of tests for the beta distribution and their application in environmental research. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 25 (1), 79-89.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (7))

- Riggs, L. S. (1989). Numerical approach for generating beta random variates. *Journal of computing in civil engineering*, 3 (2), 183-191.
- Schemel, U. (2014). *Quantifizierung des Flattereffekts von Flatteraufschlägen im Beachvolleyball mit Hilfe hochfrequenter und hochauflösender Videometrie sowie dessen Bedeutsamkeit in der Sportpraxis* (Master's thesis). Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Germany.
- Sudret, B. (2007). *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods* (Postdoctoral thesis). Université Blais Pascal, Clermont-Ferrand, France.

Zitierte Literatur (Fortsetzung (8))

- Sudret, B., Blatman, G. & Berveiller, M. (2011). Response surfaces based on polynomial chaos expansions. In J. Baroth, F. Schoefs & D. Breysse (Eds.), *Construction reliability – safety, variability and sustainability* (S. 147-167). London [u.a.]: Wiley.
- Wie, Q, Lin, R. & Liu, Z. (1988). Vortex-induced dynamic loads on a non-spinning volleyball. *Fluid Dynamics Research*, 3 (1-4), 231-237.
- Xiu, D. & Karniadakis, G. E. (2002). The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM journal on scientific computing*, 24 (2), 619-644.
- Zwerenz, K. (2015). *Statistik – Einführung in die computergestützte Datenanalyse* (6., überarb. Aufl.). Berlin [u.a.]: De Gruyter Oldenbourg.

Anhang_(I): Modellgüte PCE-Methode

Ergebnisse aus Untersuchungen zur p-Abhängigkeit:

- Fehlerabschätzung $E(\mathcal{Y})$
- Fehlerabschätzung $\text{Var}(\mathcal{Y})$
- Bestimmtheitsmaß R^2
- kreuzvalidierter Korrelationskoeffizient Q^2 (LOO-CV)

	Definition	n	$\text{Var}(\mathcal{Y})$
1- R^2	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}(x^{(i)}) - \mathcal{M}^{PCE}(x^{(i)}) \right)^2 / \text{Var}(\mathcal{Y})$	$\binom{M+p}{p} \cdot 3$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}(x^{(i)}) - \langle y \rangle \right)^2$
1- Q^2	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathcal{M}(x^{(i)}) - \mathcal{M}^{PCE}(x^{(i)})}{1 - h_i} \right)^2 / \text{Var}(\mathcal{Y})$		

LOO-CV – „leave-one-out cross validation“,

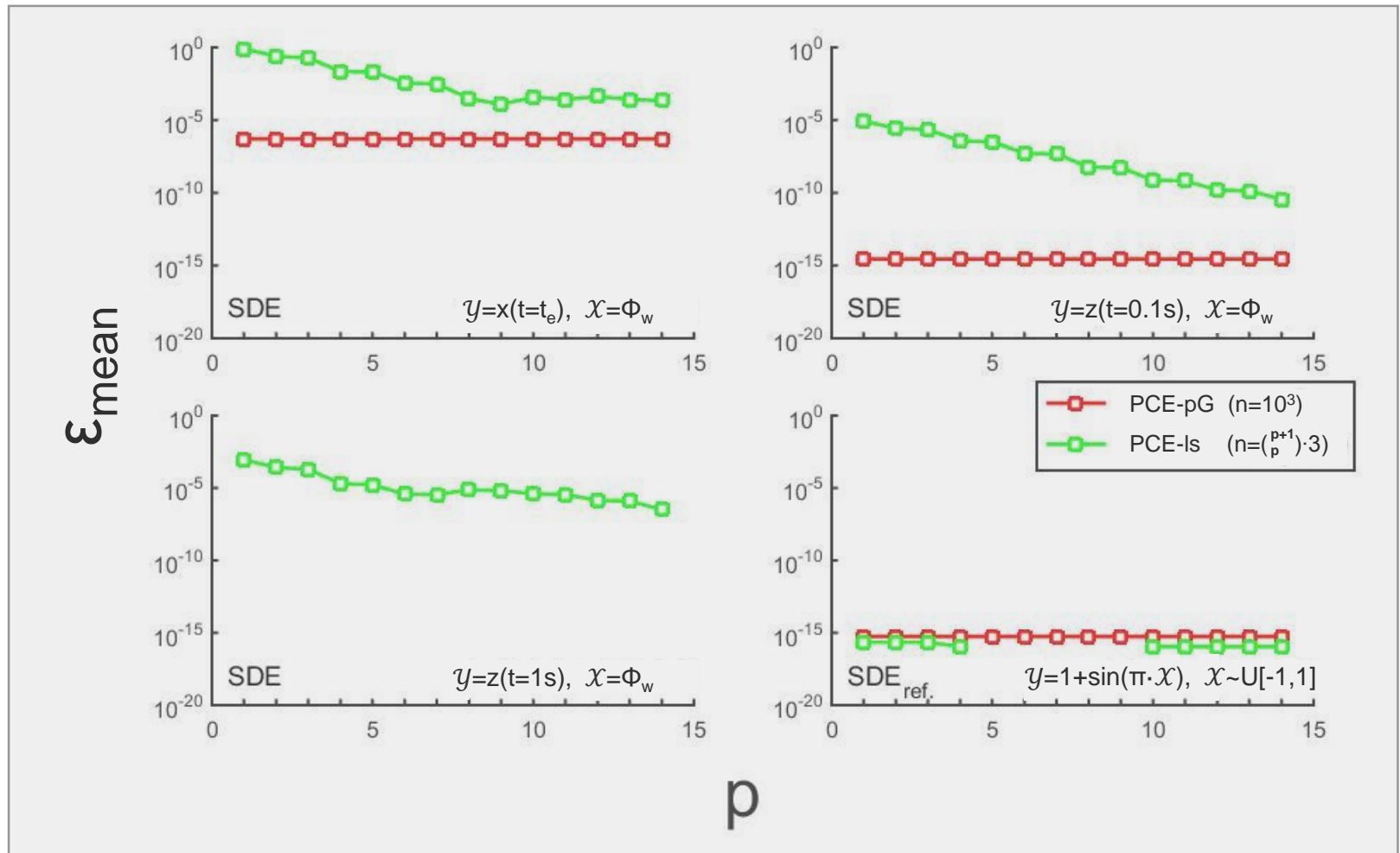
$\mathcal{X} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^T$,

h_i – i-tes Diagonalelement der Matrix $A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$, $A_{ij} = \psi_j(x^{(i)})$ ($i=1, \dots, n$ und $j=1, \dots, \binom{M+p}{p}$) (u.a. Blatman, 2009, S. 85)

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie A-I 1/5

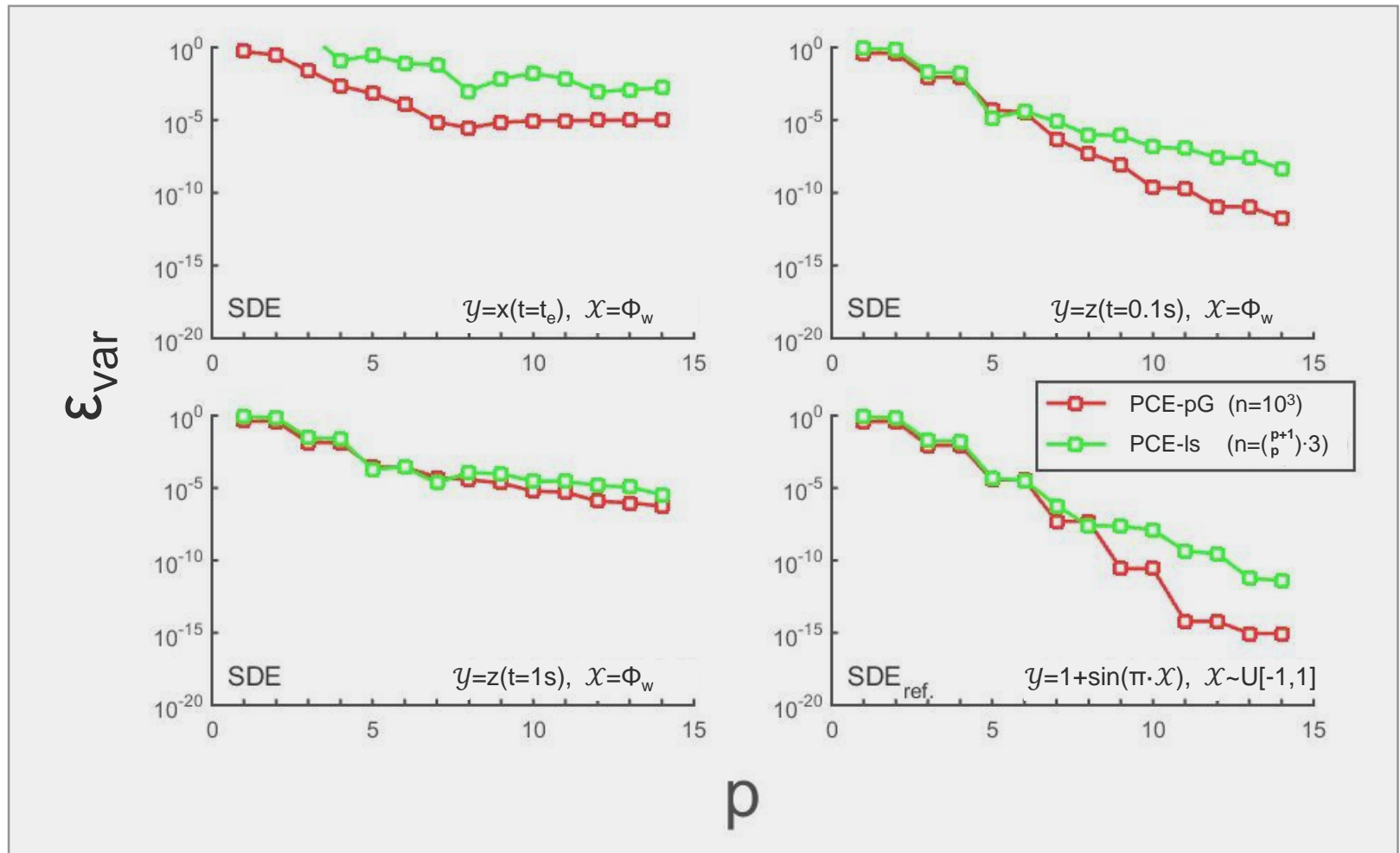
Modellgüte PCE-Methode (Modell #3 und Referenzmodell)

Fehlerabschätzung $E(y)$ in Abhängigkeit von p



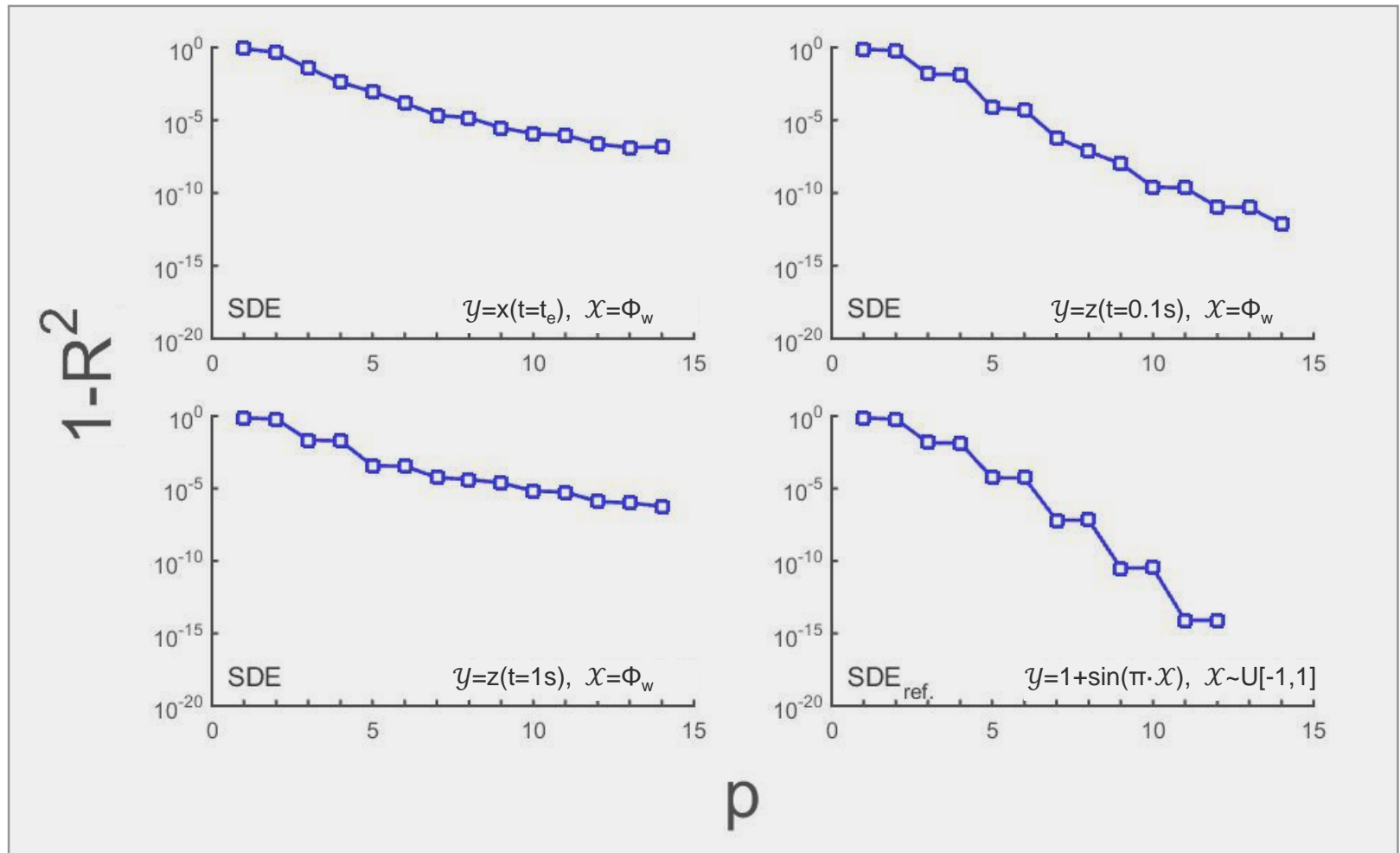
Modellgüte PCE-Methode (Modell #3 und Referenzmodell)

Fehlerabschätzung $\text{Var}(\mathcal{Y})$ in Abhängigkeit von p



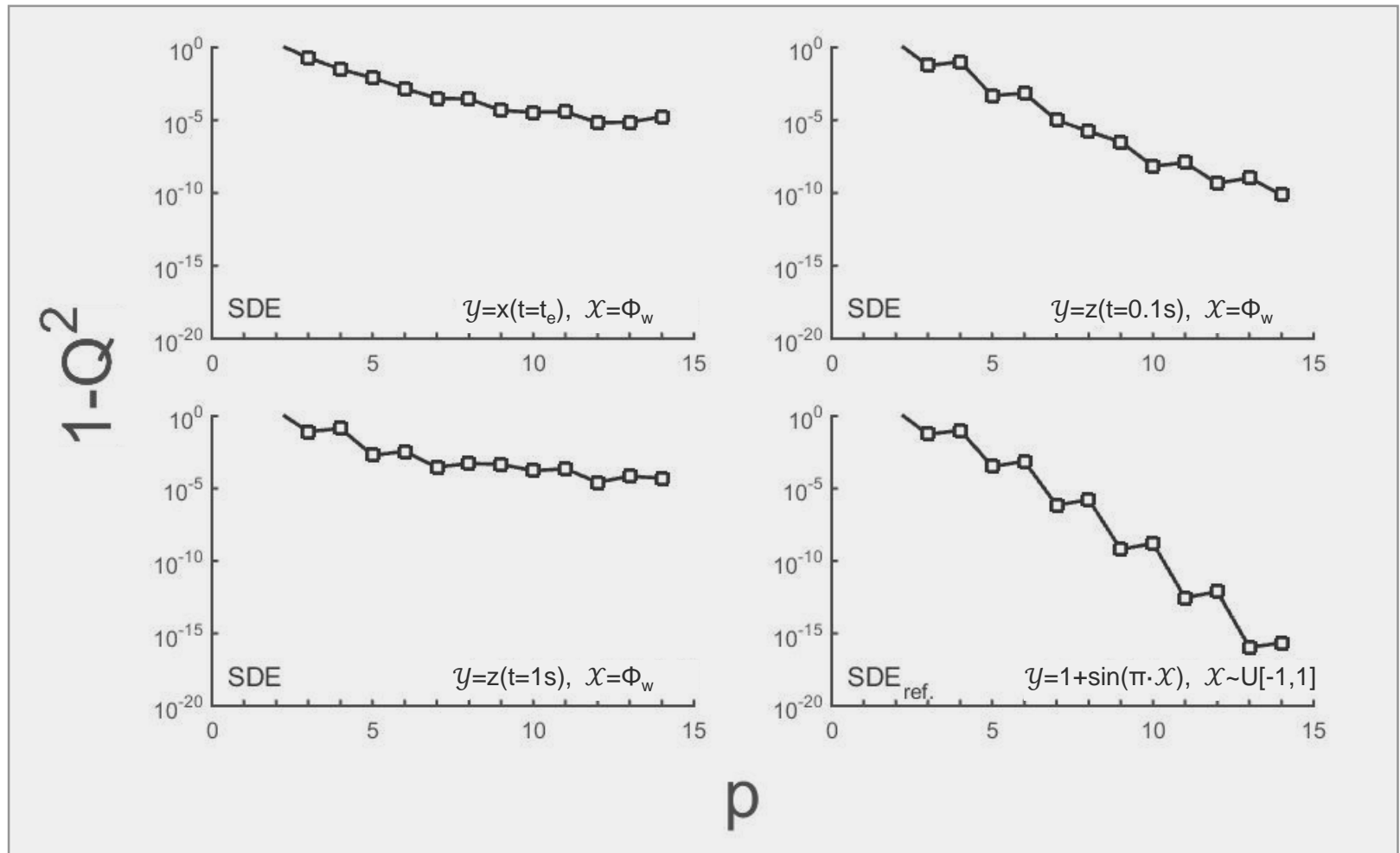
Modellgüte PCE-Methode (Modell #3 und Referenzmodell)

Bestimmtheitsmaß R^2 in Abhängigkeit von p ($n = \binom{p+1}{p} \cdot 3$)



Modellgüte PCE-Methode (Modell #3 und Referenzmodell)

kreuzvalidierter Korrelationskoeffizient Q^2 (LOO-CV) in Abhängigkeit von p ($n = \binom{p+1}{p} \cdot 3$)



Anhang (II): Teststärke von A^2 -Test und $Q_{p,F}$ -Test im Vergleich zur Teststärke des χ^2 -Tests ²³⁾

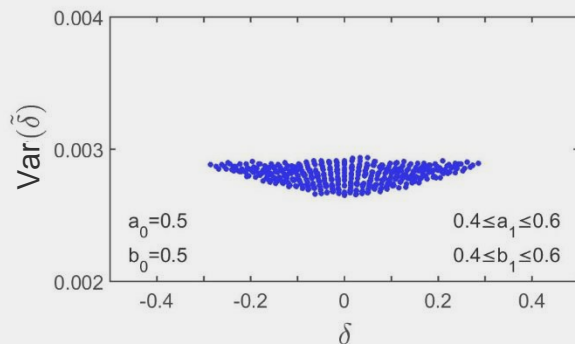
Ergebnisse aus Untersuchungen zur Teststärke (a priori) ($\alpha=0.05$) mittels Beta(a_1, b_1)-verteilten Pseudozufallszahlen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ ($n=360$ ²⁴⁾) der Zufallsvariable \mathcal{Z} :

- Teststärke auf Grundlage eines rechtsseitigen Hypothesentests, $H_0: F_{\mathcal{Z}} \in \{F_{\text{Beta}(a,b)}: (a,b)=(a_0,b_0)\}$, für $n_{MC}=5000$ ²⁵⁾ Wiederholungen
 - δ -Abhängigkeit
 - (a_1, b_1) -Abhängigkeit
 - (γ_1, γ_2) -Abhängigkeit
 - n -Abhängigkeit
- Gütefunktion mit (a_0, b_0) oder n als Parameter

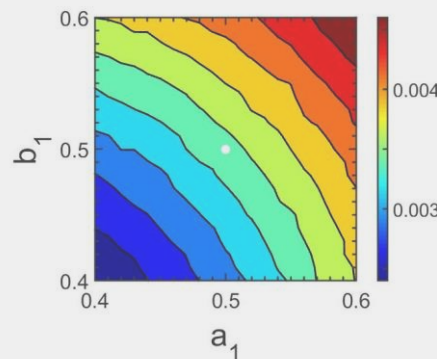
Anhang (II): Teststärke von A²-Test und Q_{p,F}-Test im Vergleich zur Teststärke des χ²-Tests (Fortsetzung (1))

Ergebnisse aus Untersuchungen zur Teststärke (a posteriori) beruhen auf einer Kenntnis der EDF für aus der Verteilung geschätzte Parameter (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) ²⁸⁾. Da der Aufwand von EDF-Berechnungen erheblich ist, sei nachstehend lediglich die Varianz einiger Parameter angegeben ($n_{MC}=100000$).

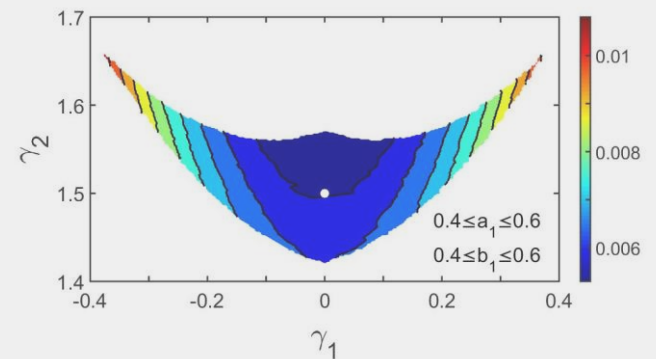
$$\text{Var}(\tilde{\delta}) = f(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$$



$$\text{Var}(\tilde{a}_1) + \text{Var}(\tilde{b}_1)$$



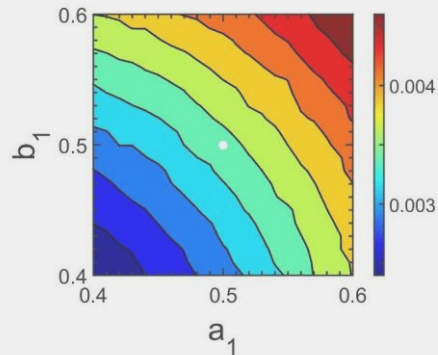
$$\text{Var}(\tilde{\gamma}_1) + \text{Var}(\tilde{\gamma}_2) = f(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$$



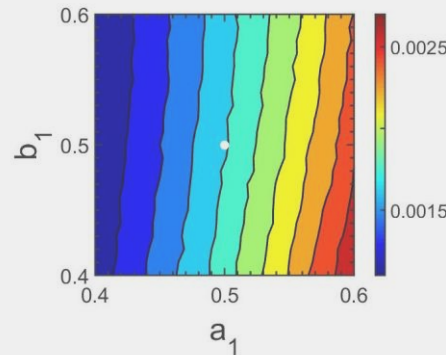
$$^{26)} \tilde{\delta} = (\mu_1 - \mu_0) / \sqrt{\frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{2}} \text{ mit } \mu_{0,1} = \frac{a_{0,1}}{a_{0,1} + b_{0,1}}, \sigma_{0,1}^2 = \frac{a_{0,1} \cdot b_{0,1}}{(a_{0,1} + b_{0,1})^2 \cdot (a_{0,1} + b_{0,1} + 1)}$$

Anhang (II): Teststärke von A²-Test und Q_{p,F}-Test im Vergleich zur Teststärke des χ²-Tests (Fortsetzung (2))

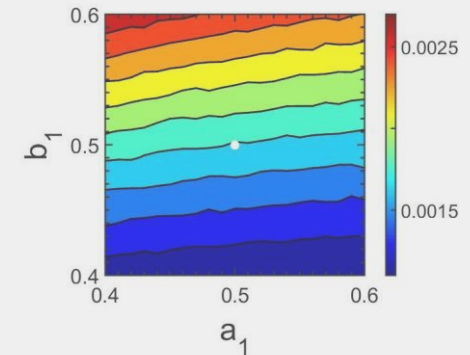
Var(\tilde{a}_1) + Var(\tilde{b}_1)



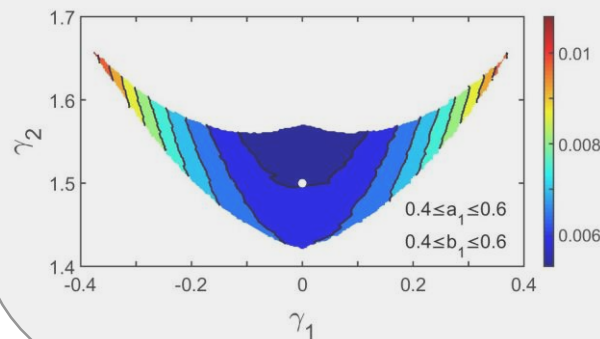
Var(\tilde{a}_1)



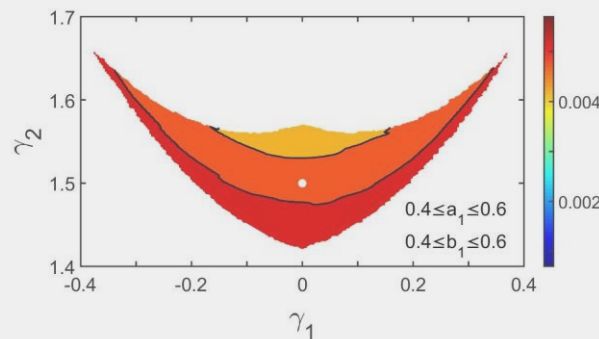
Var(\tilde{b}_1)



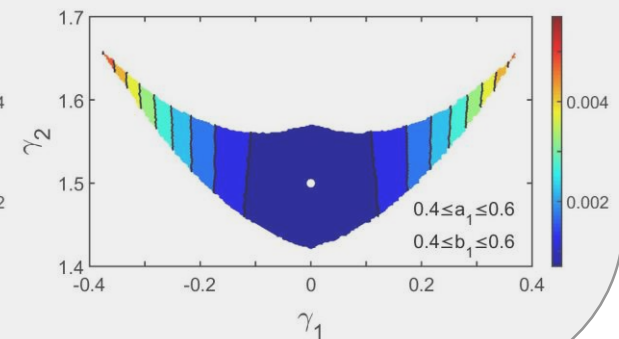
Var(\tilde{y}_1) + Var(\tilde{y}_2) = f(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)



Var(\tilde{y}_1) = f(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)



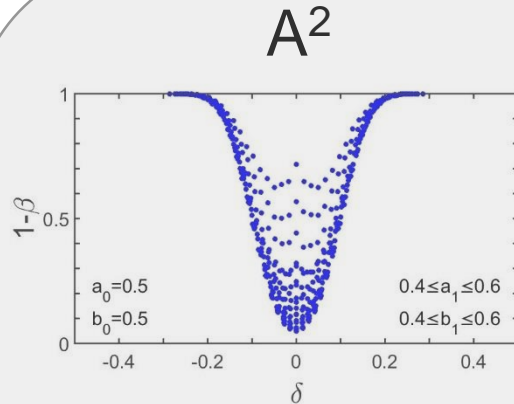
Var(\tilde{y}_2) = f(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)



$$27) \gamma_1 = \frac{2 \cdot (b_1 - a_1) \cdot \sqrt{a_1 + b_1 + 1}}{(a_1 + b_1 + 2) \cdot \sqrt{a_1 \cdot b_1}}, \quad \gamma_2 = 6 \cdot \frac{a_1^3 + a_1^2 \cdot (1 - 2 \cdot b_1) + b_1^2 \cdot (1 + b_1) - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot (2 + b_1)}{a_1 \cdot b_1 \cdot (a_1 + b_1 + 2) \cdot (a_1 + b_1 + 3)}$$

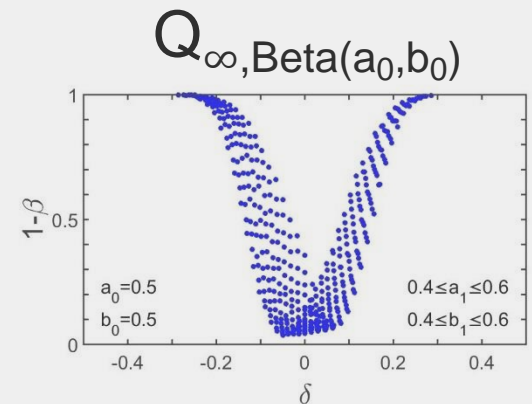
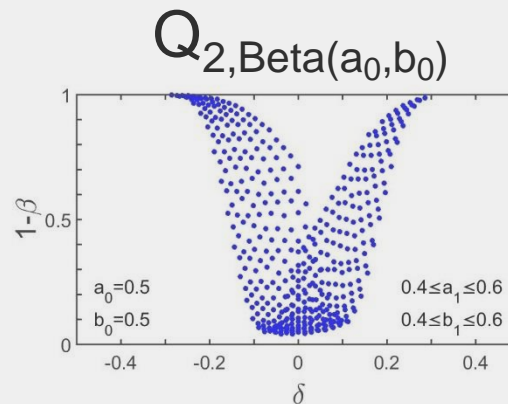
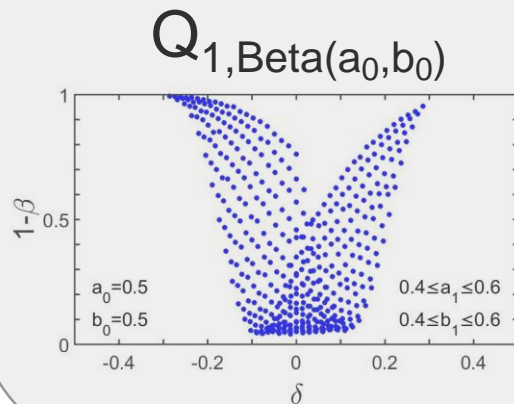
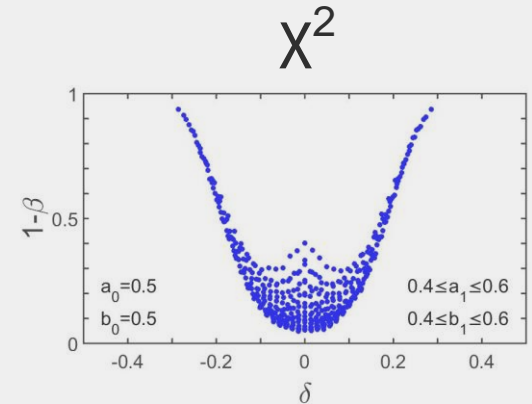
Teststärke

δ -Abhängigkeit



$1-\beta$	$(a_1, b_1) = (a_0, b_0) = (0.5, 0.5)$
A^2	0.0507
χ^2	0.0515
$Q_{1, \text{Beta}(a_0, b_0)}$	0.0521
$Q_{2, \text{Beta}(a_0, b_0)}$	0.0512
$Q_{\infty, \text{Beta}(a_0, b_0)}$	0.0495

Ausgewählte $(1-\beta)$ -Werte ($n_{MC}=100000$) in Ergänzung zu Ergebnissen aus weiteren Test-Vergleichen ($n=10, 25, 50, 100$) von [Raschke \(2009, 2011\)](#).



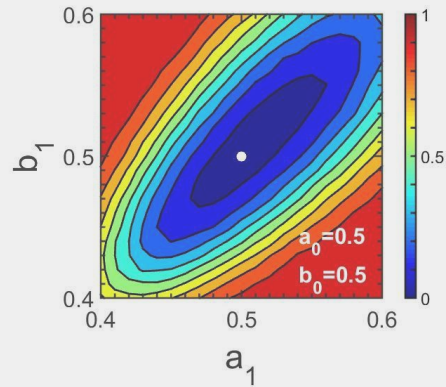
β – Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art

B. Meyer | Knuckling Effect Volleyball | Folie A-II 4/9

28) Anstelle der Maximum-Likelihood-Methode wird zur Schätzung verwendet $\tilde{a}_1 = \tilde{b}_1 \cdot E(Z) / (1 - E(Z))$ und $\tilde{b}_1 = (1 - E(Z)) \cdot [E(Z) \cdot (1 - E(Z)) - \text{Var}(Z)] / \text{Var}(Z)$ (Hahn & Shapiro, 1994, S. 95).

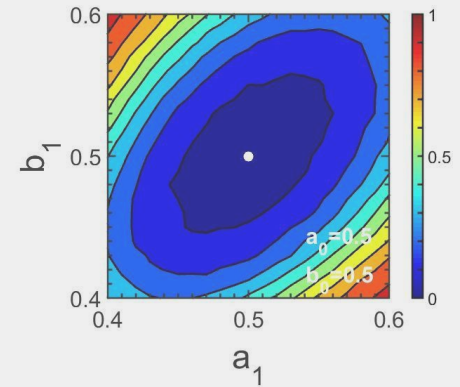
Teststärke

(a_1, b_1) -Abhängigkeit

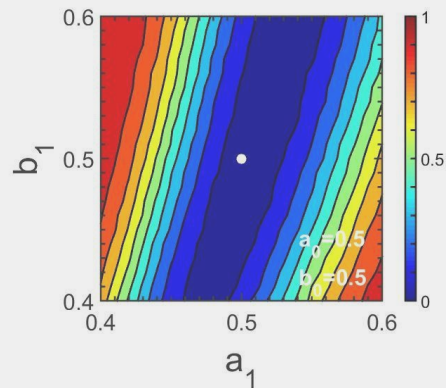


A^2

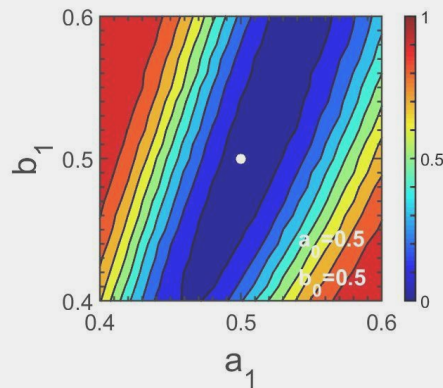
χ^2



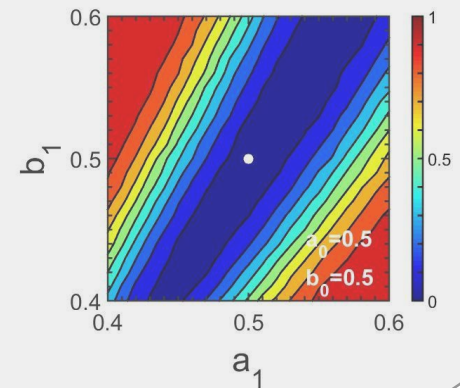
$Q_{1, \text{Beta}(a_0, b_0)}$



$Q_{2, \text{Beta}(a_0, b_0)}$



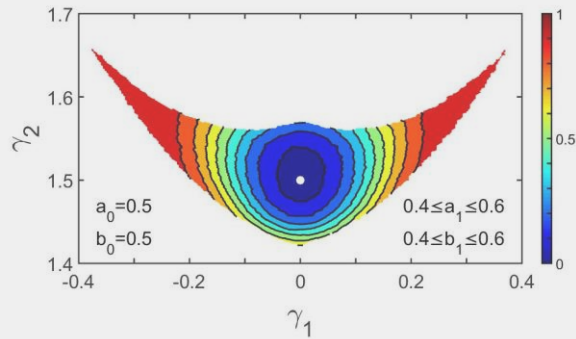
$Q_{\infty, \text{Beta}(a_0, b_0)}$



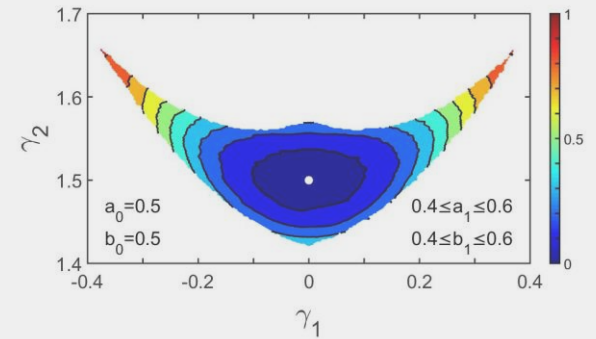
Teststärke

(γ_1, γ_2) -Abhängigkeit

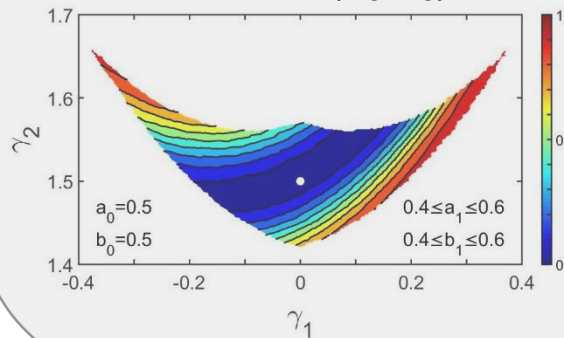
A^2



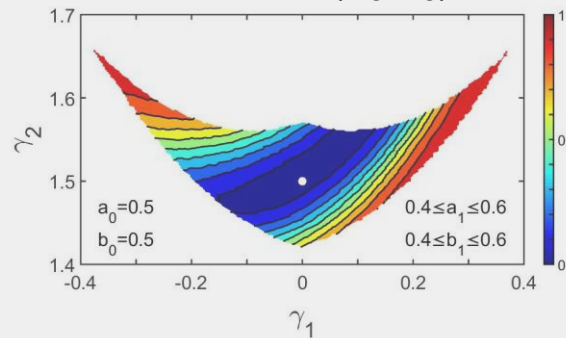
χ^2



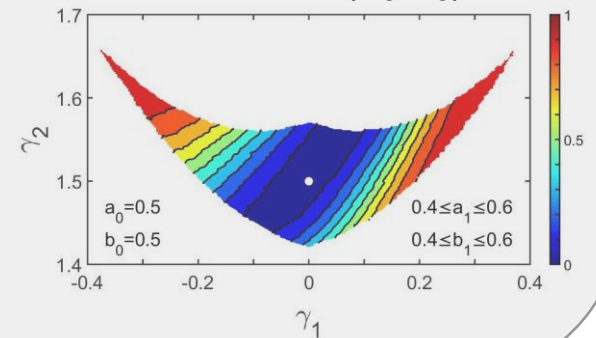
$Q_{1, \text{Beta}(a_0, b_0)}$



$Q_{2, \text{Beta}(a_0, b_0)}$

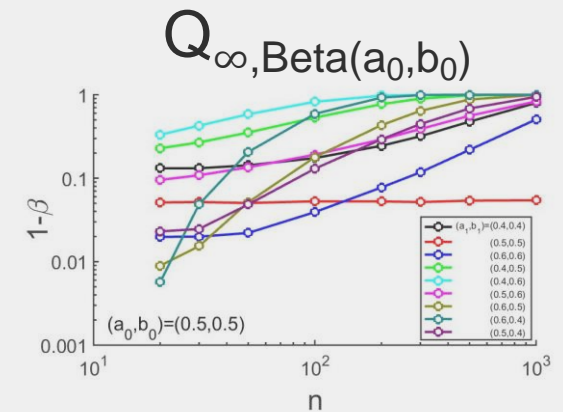
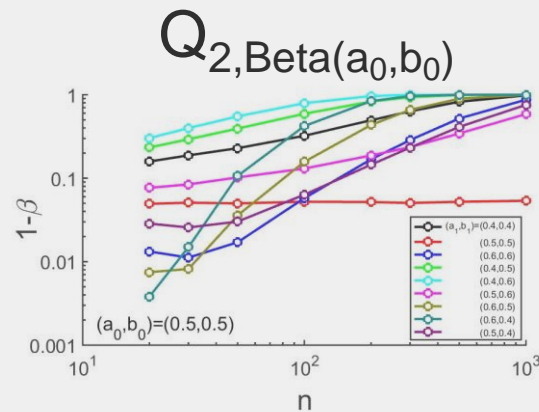
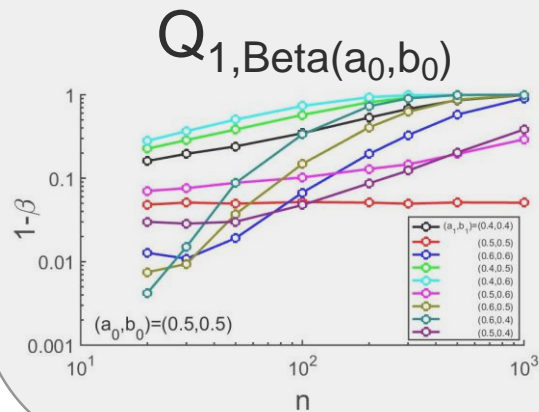
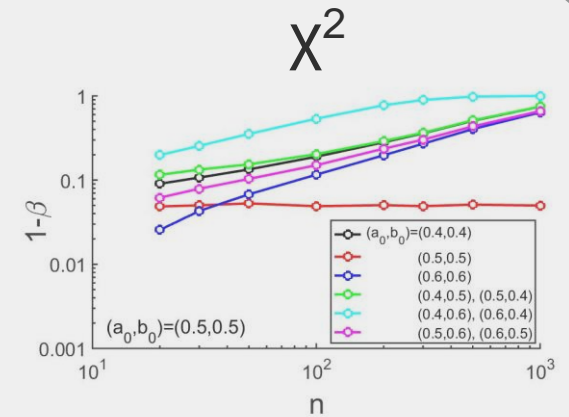
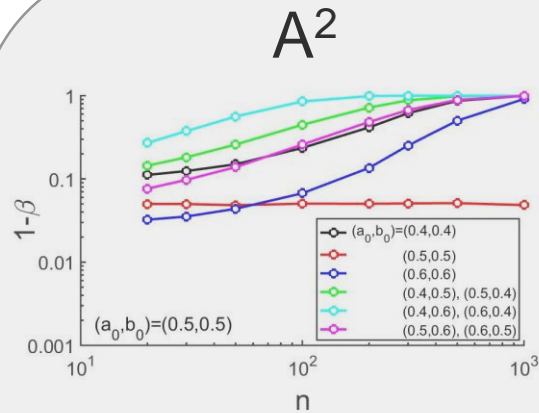


$Q_{\infty, \text{Beta}(a_0, b_0)}$



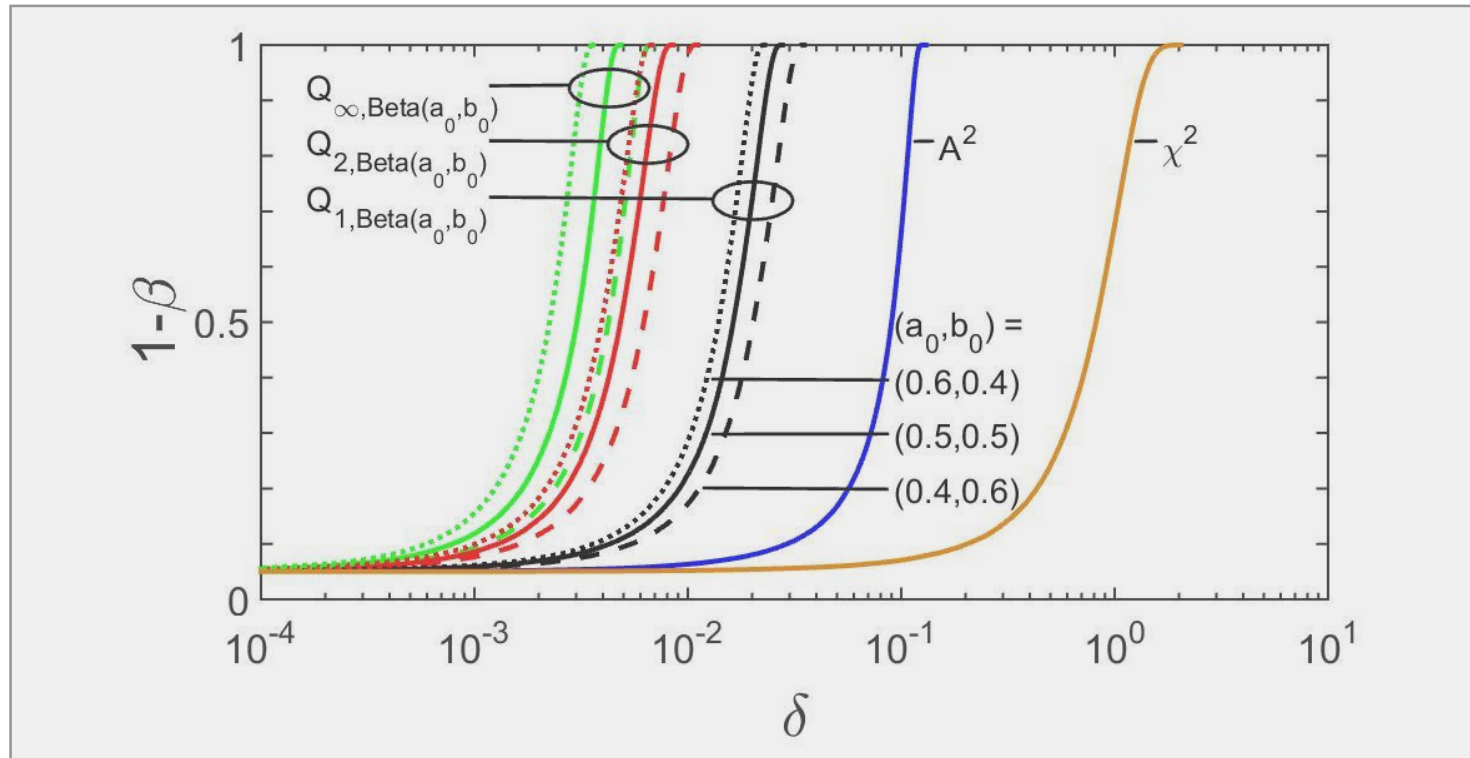
Teststärke

n-Abhängigkeit ($n_{MC}=100000$)



Teststärke

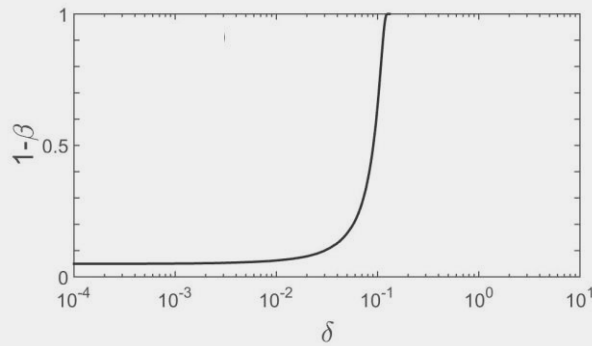
Gütefunktion $1-\beta = 1-F(Q_{1-\alpha}-\sqrt{n}\cdot\delta)$ – Parameter (a_0, b_0)



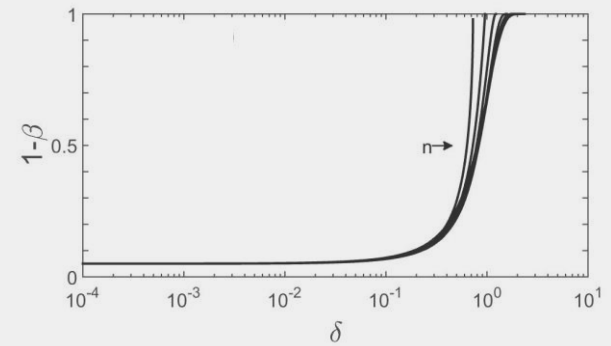
Teststärke

Gütefunktion $1-\beta = 1-F(Q_{1-\alpha}-\sqrt{n}\cdot\delta)$ – Parameter n *)

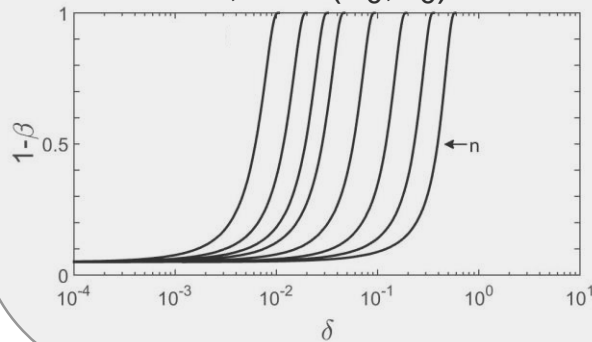
A^2



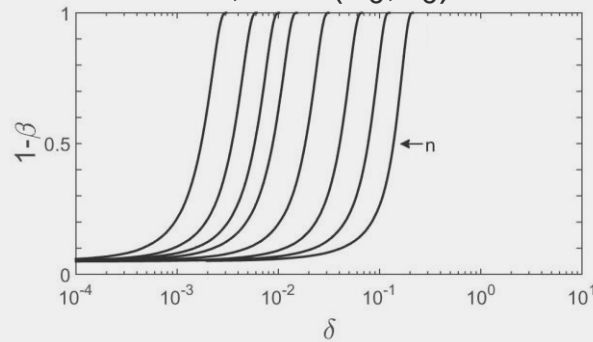
χ^2



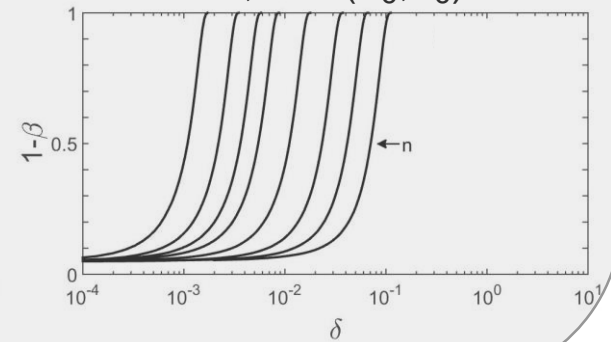
$Q_{1,Beta(a_0,b_0)}$



$Q_{2,Beta(a_0,b_0)}$



$Q_{\infty,Beta(a_0,b_0)}$



Anhang (III): Verteilungsfunktionen und Quantile

Um (1) den Einfluß von (a_0, b_0) bzw. n in $1-\beta=f(\delta)$ -Verläufen oder (2) die n -Abhängigkeit der Teststärke beurteilen zu können, ist eine Kenntnis der Verteilungsfunktion F für einen jeweiligen Test und für weite Wertebereiche der Parameter (a_0, b_0) und n erforderlich. Im folgenden sind für Untersuchungen in Anhang II verwendete Verläufe von F zusammengestellt. Sie sind entweder

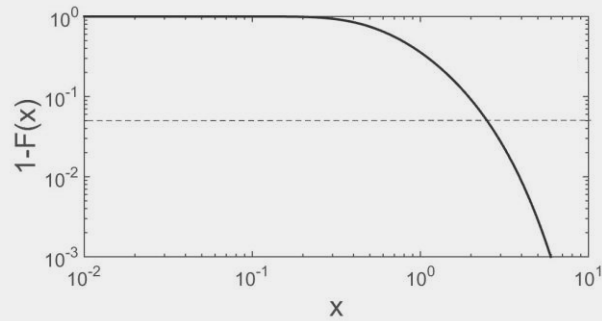
- der Literatur entnommen ([Anderson & Darling, 1954](#)) oder
- mittels Monte-Carlo-Simulation ($n_{MC}=100000$) selbst erzeugt.

Die Darstellung erfolgt in der Form $1-F(X)$, wobei X die jeweilige Testgröße bezeichnet. Zudem werden verwendete $(1-\alpha)$ -Quantile mit angegeben.

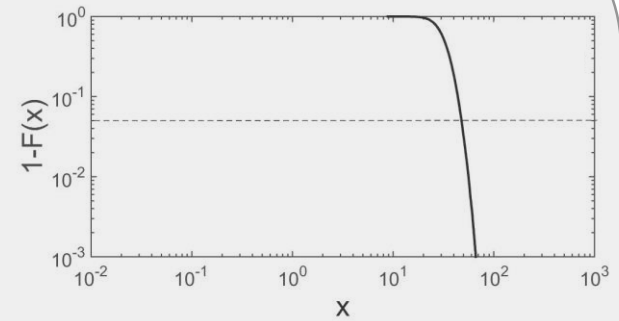
Verteilungsfunktion

Parameter (a_0, b_0)

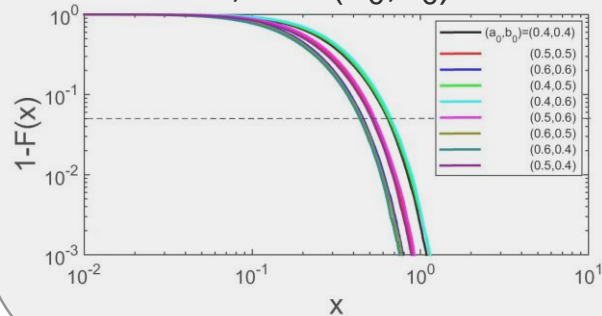
A^2



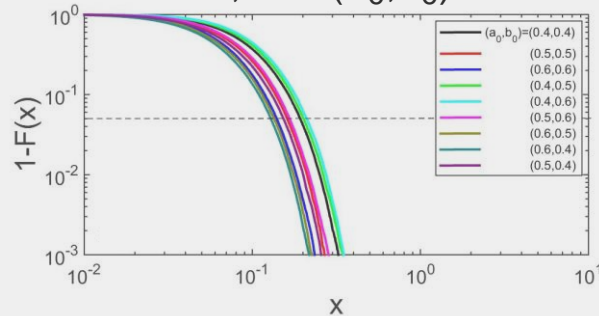
X^2



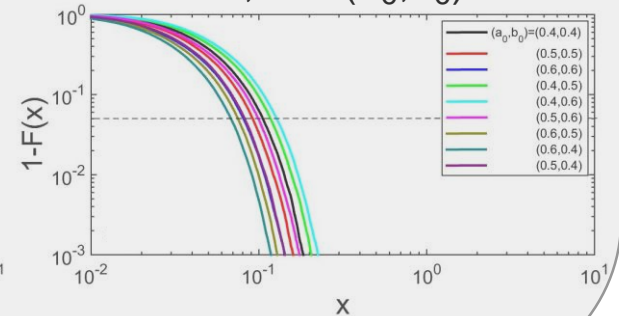
$Q_1, \text{Beta}(a_0, b_0)$



$Q_2, \text{Beta}(a_0, b_0)$



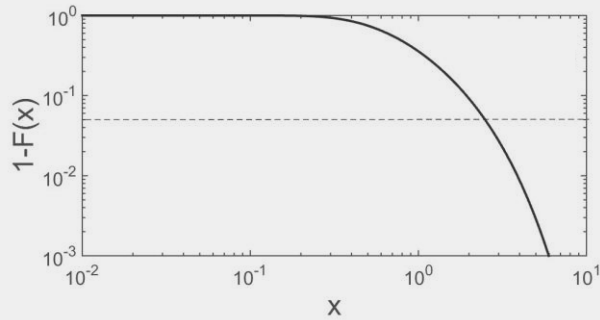
$Q_\infty, \text{Beta}(a_0, b_0)$



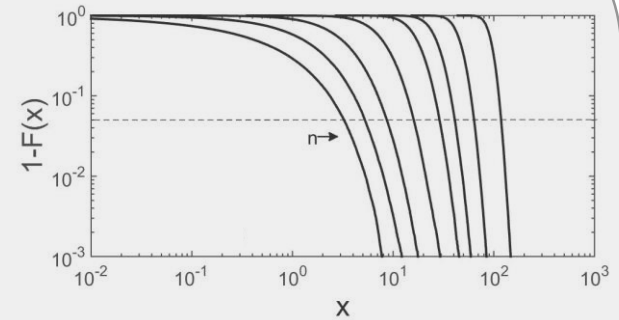
Verteilungsfunktion

Parameter n^*

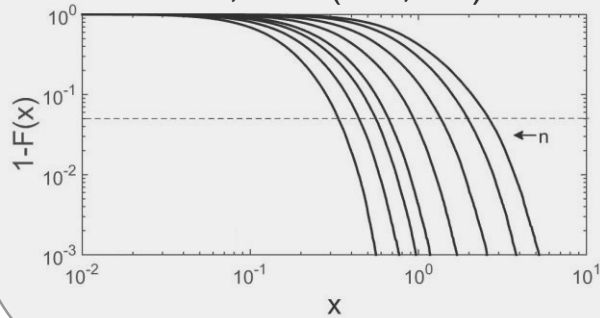
A^2



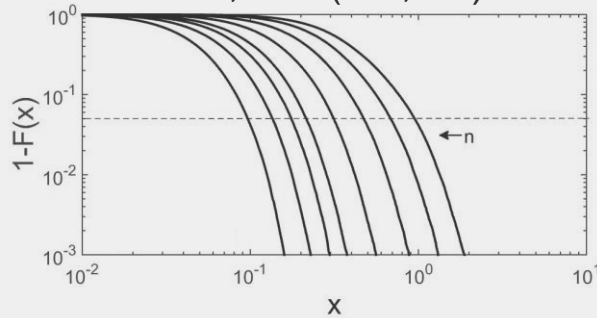
x^2



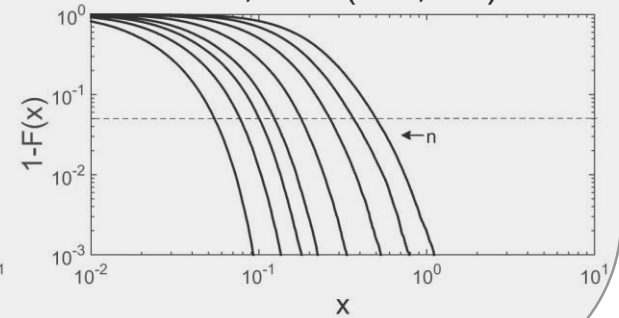
$Q_1, \text{Beta}(0.5, 0.5)$



$Q_2, \text{Beta}(0.5, 0.5)$



$Q_\infty, \text{Beta}(0.5, 0.5)$

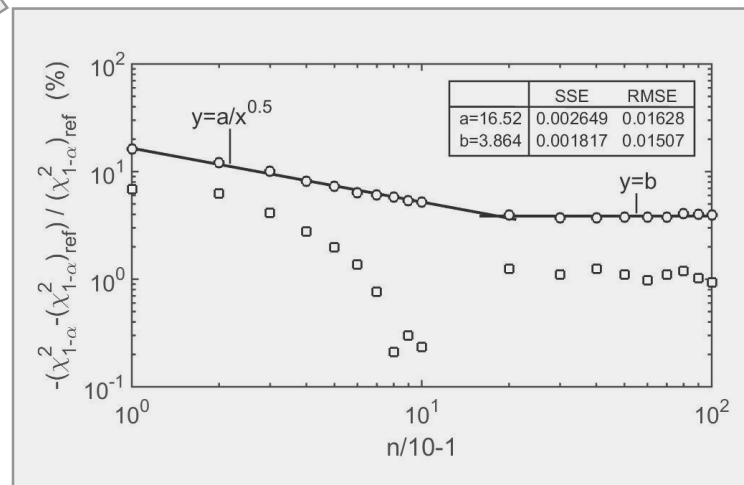


(1-α)-Quantil (α=0.05)

Parameter (a₀,b₀) und Parameter n

	(a ₀ ,b ₀)		
	(0.4,0.6)	(0.5,0.5)	(0.6,0.4)
A ²	2.492	2.492	2.492
χ ²	47.77	47.77	47.77
Q _{1,Beta(a₀,b₀)}	0.6683	0.5254	0.4343
Q _{2,Beta(a₀,b₀)}	0.2110	0.1613	0.1285
Q _{∞,Beta(a₀,b₀)}	0.1284	0.09230	0.06816

	n							
	20	30	50	100	200	300	500	1000
A ²	2.492	2.492	2.492	2.492	2.492	2.492	2.492	2.492
χ ²	3.250	5.243	8.656	16.02	28.88	40.98	63.63	118.2
Q _{1,Beta(0.5,0.5)}	2.628	1.969	1.360	0.9365	0.6645	0.5591	0.4444	0.3343
Q _{2,Beta(0.5,0.5)}	0.9497	0.6839	0.4731	0.3135	0.2150	0.1755	0.1359	0.09652
Q _{∞,Beta(0.5,0.5)}	0.4994	0.3661	0.2649	0.1784	0.1237	0.1005	0.07782	0.05436



Vergleich von $\chi^2_{1-\alpha}$ im Anpassungstest für Verteilung von Pseudozufallszahlen (diese Arbeit) und $(\chi^2_{1-\alpha})_{ref} = \chi^2_{1-\alpha, k}$ ($k=n/10-1$) (u.a. Zwerenz, 2015, S. 329) in Abhängigkeit von $n/10-1$. Innere Intervallgrenzen im Anpassungstest sind mittig gewählt (kreisförmige Symbole) oder maximal links- bzw. rechtsseitig verschoben (rechteckige Symbole). Innenbild: Ergebnisse Regressionsanalyse (doppelt-logarithmische Transformation).

RMSE – Root Mean Squared Error, SSE – Sum Squared Error

Anhang (IV): Parameterschätzung im Regressionsmodell zur $y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Varianz des Ballauftreffortes

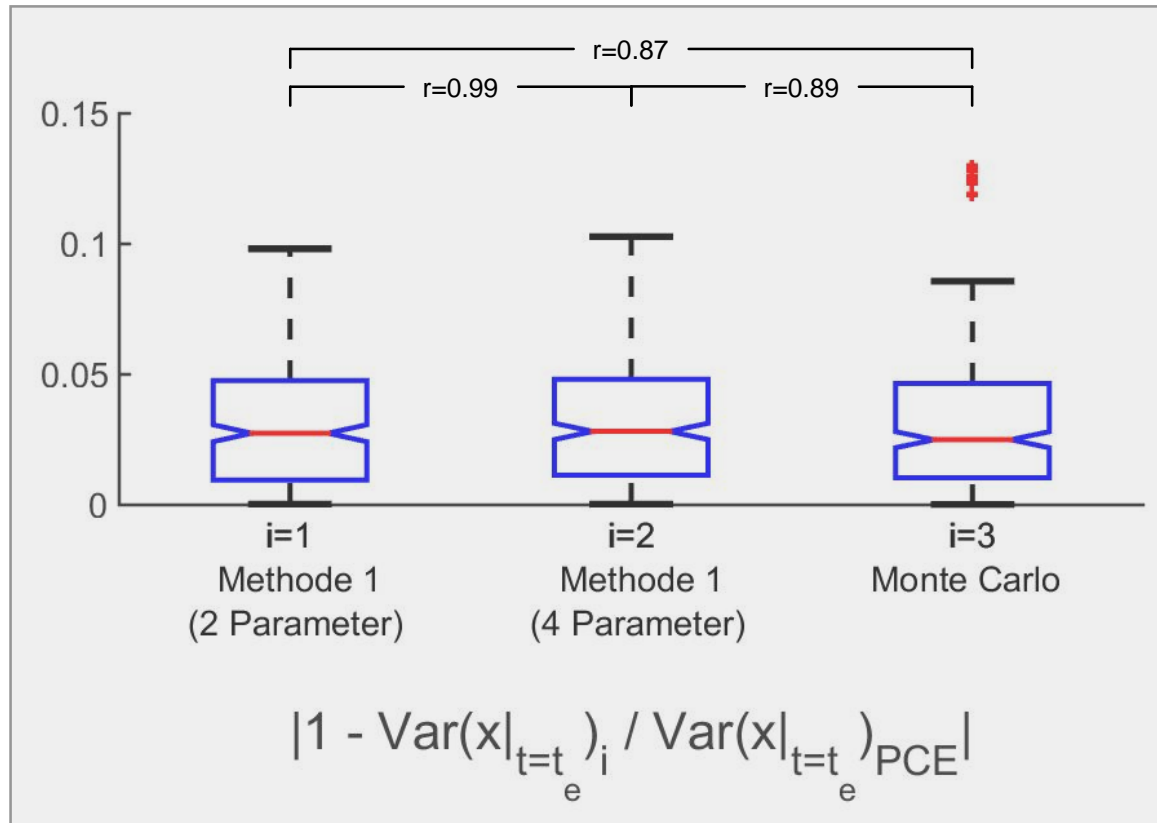
Ergebnisse aus Untersuchungen zur Berechnung der Varianz des Ballauftreffortes auf Grundlage von Parameterschätzung im Regressionsmodell:

- Vergleich von Verfahren der $\text{Var}(x|t=t_e)$ -Berechnung
- Sensitivitätsanalyse zum Einfluß von $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$

Parameterschätzung im Regressionsmodell zur $y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Varianz des Ballauftreffortes

Vergleich von Verfahren der $\text{Var}(x|_{t=t_e})$ -Berechnung



Vergleich von Verfahren zur Berechnung der Varianz des Ballauftreffortes für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$):

(i=1, 2) Verfahren auf Grundlage von Parameterschätzung (a, b, c und d) im Regressionsmodell (**Methode I**, Folie 16), die den Ausdruck $(d-c)^2 \cdot ab / (a+b)^2 / (a+b+1)$ zur Varianzberechnung nutzen. Im Fall $i=1$ werden lediglich a und b geschätzt und es wird die Näherung $(c, d) \approx (\min(x|_{t=t_e}), \max(x|_{t=t_e}))$ verwendet.

(i=3) Verfahren, das lediglich auf Monte-Carlo-Simulationen beruht.

Parameterschätzung im Regressionsmodell zur $y(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Varianz des Ballauftreffortes

Sensitivitätsanalyse zum Einfluss von $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$ – Sensitivitätskoeffizienten

	Formelausdruck	
	allg.	a=b=0.5
$S_{\text{Var}/a} = \frac{\partial \text{Var}(x _{t=t_e})}{\partial a}$	$-\frac{2a^2 - b^2 + ab + a - b}{a \cdot (a + b) \cdot (a + b + 1)} \cdot \text{Var}(x _{t=t_e})$	$-\left(\frac{d - c}{4}\right)^2$
$S_{\text{Var}/b} = \frac{\partial \text{Var}(x _{t=t_e})}{\partial b}$	$-\frac{2b^2 - a^2 + ab + b - a}{b \cdot (a + b) \cdot (a + b + 1)} \cdot \text{Var}(x _{t=t_e})$	$-\left(\frac{d - c}{4}\right)^2$
$S_{\text{Var}/c} = \frac{\partial \text{Var}(x _{t=t_e})}{\partial c}$	$-\frac{2}{d - c} \cdot \text{Var}(x _{t=t_e})$	$-\frac{d - c}{4}$
$S_{\text{Var}/d} = \frac{\partial \text{Var}(x _{t=t_e})}{\partial d}$	$\frac{2}{d - c} \cdot \text{Var}(x _{t=t_e})$	$\frac{d - c}{4}$

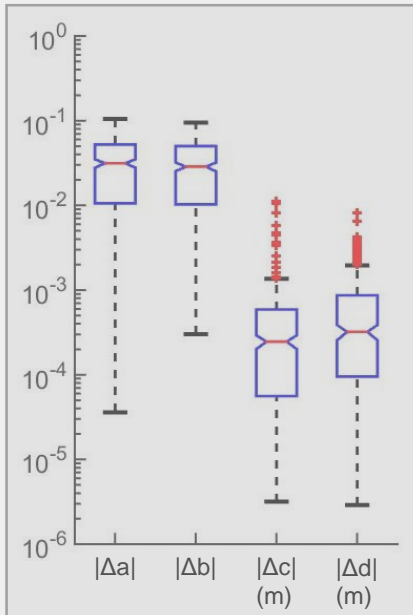
Sensitivitätskoeffizienten ²⁹⁾ in einer Berechnung der Varianz des Ballauftreffortes gemäß $\text{Var}(x|_{t=t_e}) = (d-c)^2 \cdot ab / (a+b)^2 / (a+b+1)$

²⁹⁾ In der Sensitivitätsanalyse wurden lediglich *explizite* Abhängigkeiten angenommen. *Implizite* Abhängigkeiten (a- und b-Sensitivität (totales Differential)) bestehen nicht. Partielle Differentiale mit Ableitung nach a bzw. b, c, d verschwinden nämlich, wie sich unter Verwendung eines angegebenen Ausdrucks für a bzw. b (Folie 16) sowie $E(x|_{t=t_e}) = c + (d-c) \cdot a / (a+b)$ (für einen $\text{Var}(x|_{t=t_e})$ -Ausdruck siehe z.B. diese Folie) zeigen lässt.

Parameterschätzung im Regressionsmodell zur $\mathcal{Y}(t=\text{const.})$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Varianz des Ballauftreffortes

Sensitivitätsanalyse zum Einfluss von $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$ – $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$



	Formel Ausdruck
Δa	$a - \left(\frac{(E(\mathcal{Y}) - \min(x _{t=t_e}))^2 \cdot (\max(x _{t=t_e}) - E(\mathcal{Y}))}{\text{Var}(\mathcal{Y}) \cdot (\max(x _{t=t_e}) - \min(x _{t=t_e}))} - \frac{E(\mathcal{Y}) - \min(x _{t=t_e})}{\max(x _{t=t_e}) - \min(x _{t=t_e})} \right)$
Δb	$b - \left(\frac{(E(\mathcal{Y}) - \min(x _{t=t_e}))^2 \cdot (\max(x _{t=t_e}) - E(\mathcal{Y}))}{\text{Var}(\mathcal{Y}) \cdot (\max(x _{t=t_e}) - \min(x _{t=t_e}))} - \frac{E(\mathcal{Y}) - \min(x _{t=t_e})}{\max(x _{t=t_e}) - \min(x _{t=t_e})} \right) \cdot \left(\frac{\max(x _{t=t_e}) - E(\mathcal{Y})}{E(\mathcal{Y}) - \min(x _{t=t_e})} \right)$
Δc	$\min(x _{t=t_e}) - c$
Δd	$d - \max(x _{t=t_e})$

Vergleich von $|\Delta a|$ und $|\Delta b|$ gegenüber $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$ für den Bereich $(v_a, \theta_a) = (50 \dots 80 \text{ km/h}, 10 \dots 20^\circ)$ ($n=360$ bzw. $n=\binom{11}{10} \cdot 3$) (links) sowie verwendete Verfahren der Berechnung (rechts). $E(\mathcal{Y})$ und $\text{Var}(\mathcal{Y})$ aus PCE-Analyse ($n=\binom{11}{10} \cdot 3$), wobei abkürzend \mathcal{Y} anstelle von $x|_{t=t_e}$ dargestellt ist. a, b, c und d aus (a, b, c, d) -Schätzung ($n=360$) (**Methode I**, Folie 16).

Varianz des Ballauftreffortes

Sensitivitätsanalyse zum Einfluss von $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$ – Ergebnisse für ausgewählte Werte ($a=b=0.5$)

$ S_{\text{Var}/a} \cdot \Delta a $	$ S_{\text{Var}/b} \cdot \Delta b $	$ S_{\text{Var}/c} \cdot \Delta c $	$ S_{\text{Var}/d} \cdot \Delta d $
0.02 m ²	0.02 m ²	0.0004 m ²	0.0005 m ²

Betragsmäßige Änderung der Varianz des Ballauftreffortes infolge von Änderungen $|\Delta a|$, $|\Delta b|$, $|\Delta c|$ und $|\Delta d|$.
Zur Berechnung eignen sich angegebene formelmäßige Ausdrücke für Sensitivitätskoeffizienten (Folie A-IV 2).
Verwendete Werte: $d-c \approx 3$ m sowie $|\Delta a| \approx 0.04$, $|\Delta b| \approx 0.03$, $|\Delta c| \approx 0.0005$ m und $|\Delta d| \approx 0.0007$ m.

Anhang (V): Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der \mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

PCA: Anteil an Totalvariation

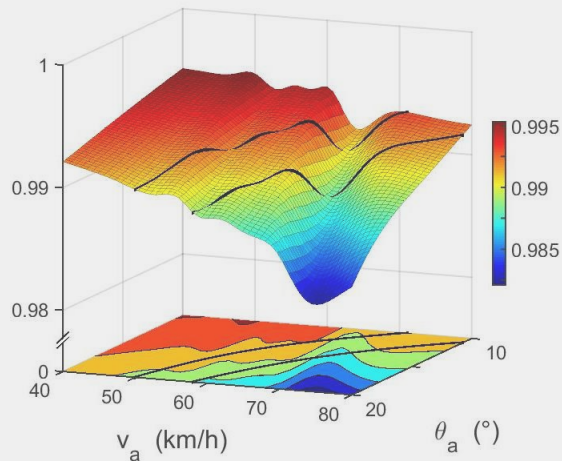
Ergebnisse einer Eigenwertanalyse (PCA) im kovarianzbasierten Trajektorienmodell:

- durch erste Hauptkomponente erklärte Varianz für
 - Betrag Ortsvektor $|\vec{X}|$
 - Leistung P

Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der $|\bar{X}|$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

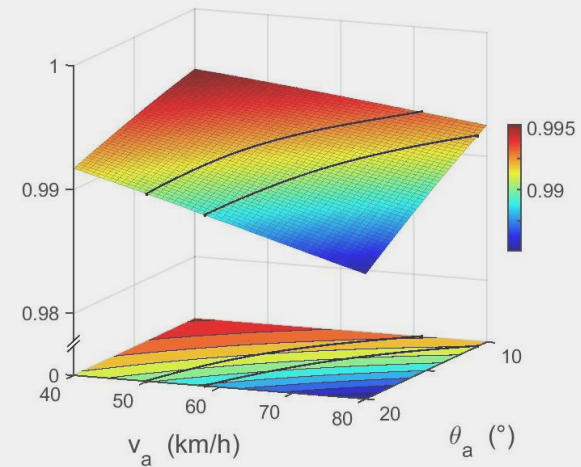
PCA: Anteil an Totalvariation ($N_{PCA}=1$) (a)

$$\lambda_1 / \sum_i \lambda_i$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$Q_{0.10}=0.987$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

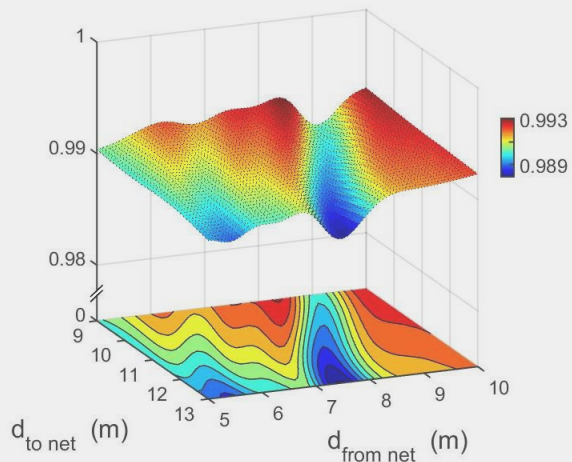
$Q_{0.10}=0.988$

$r_0=0.94$

Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der $|\bar{X}|$ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

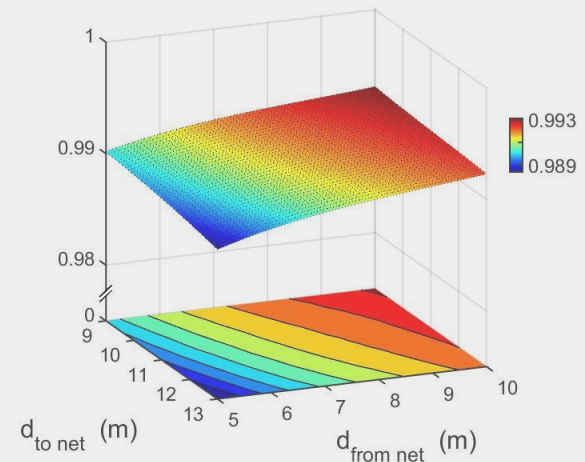
PCA: Anteil an Totalvariation ($N_{PCA}=1$) (b)

$$\lambda_1 / \sum_i \lambda_i$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$Q_{0.10} = 0.990$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

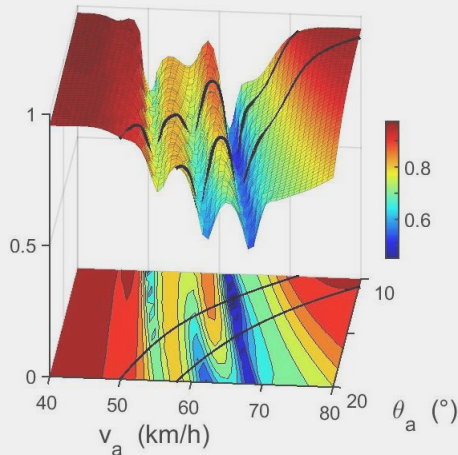
$$Q_{0.10} = 0.990$$

$$r_0 = 0.57$$

Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der P-Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

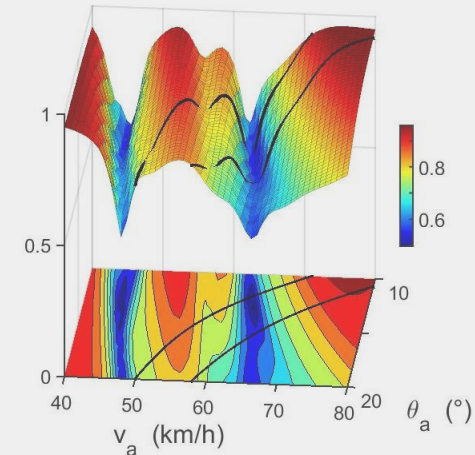
PCA: Anteil an Totalvariation ($N_{PCA}=1$) (a)

$$\lambda_1 / \sum_i \lambda_i$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$Q_{0.10} = 0.655 \text{ }^{30)}$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

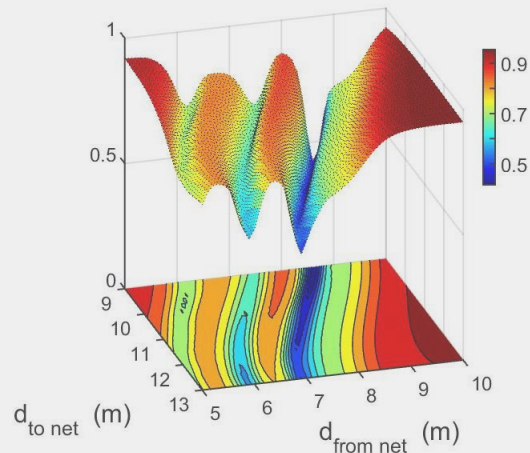
$$Q_{0.10} = 0.612 \text{ }^{30)}$$

$$r_0 = 0.47$$

Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der P-Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

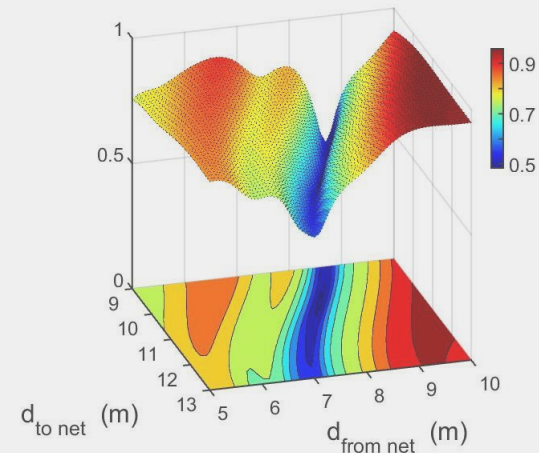
PCA: Anteil an Totalvariation ($N_{PCA}=1$) (b)

$$\lambda_1 / \sum_i \lambda_i$$



$$\bar{C}_w = f(v)$$

$$Q_{0.10} = 0.628^{30)}$$



$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

$$Q_{0.10} = 0.625^{30)}$$

$$r_0 = 0.86$$

Anhang (VI): Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der \mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung

Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix

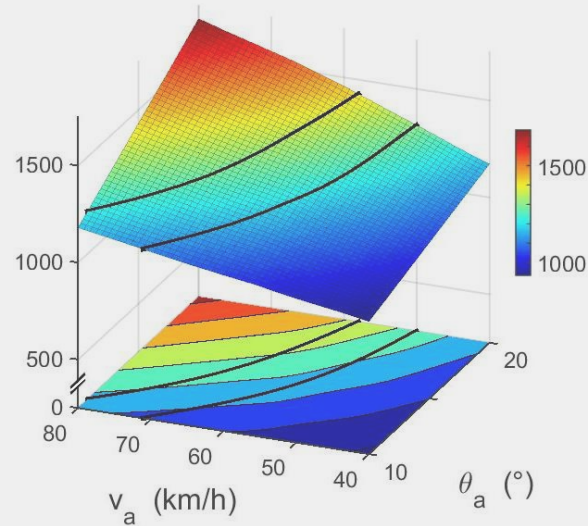
Ergebnisse einer Eigenwertanalyse im kovarianzbasierten Trajektorienmodell:

- Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix nach Datenselektion ($\Delta t=0.1\text{ms} \rightarrow \Delta t=1\text{ ms}$) für
 - Modell #3
 - einen Vergleich Modell #3 vs. Modell #2

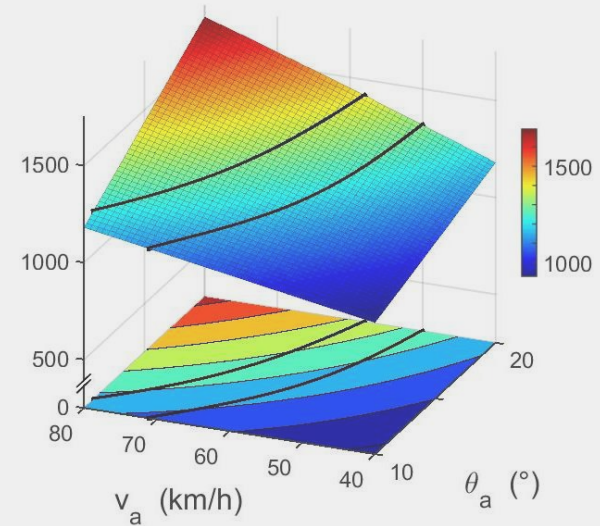
Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der \mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix (a)

N



$$\bar{C}_w = f(v)$$

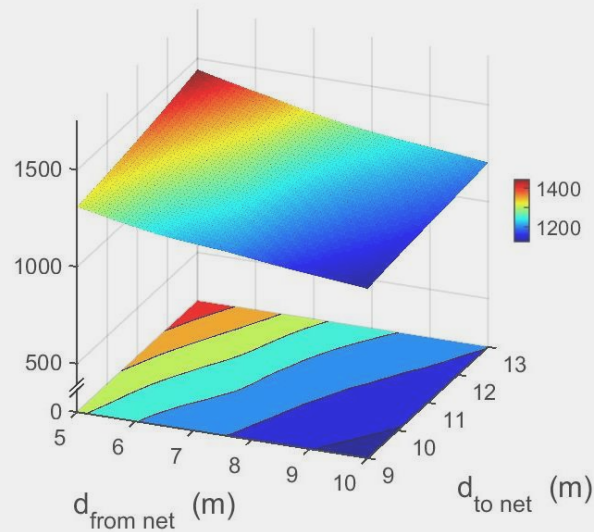


$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

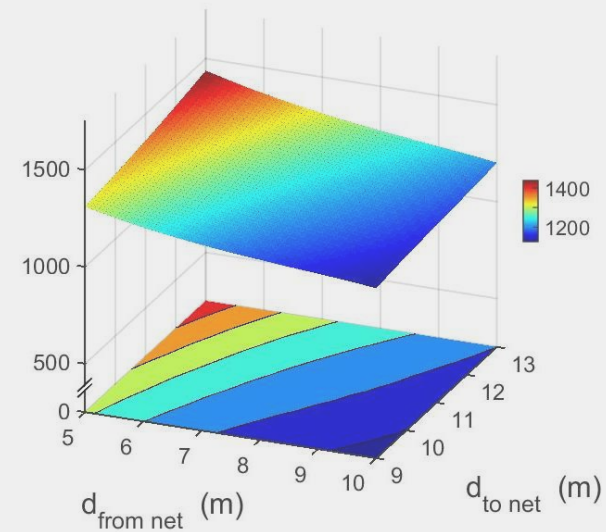
Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der \mathcal{Y} -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3)

Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix (b)

N



$$\bar{C}_w = f(v)$$

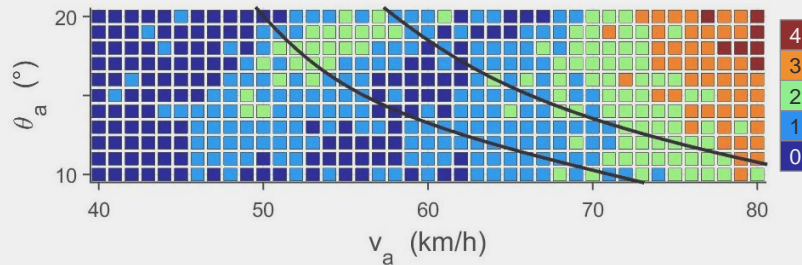


$$\bar{C}_w = \text{const.}$$

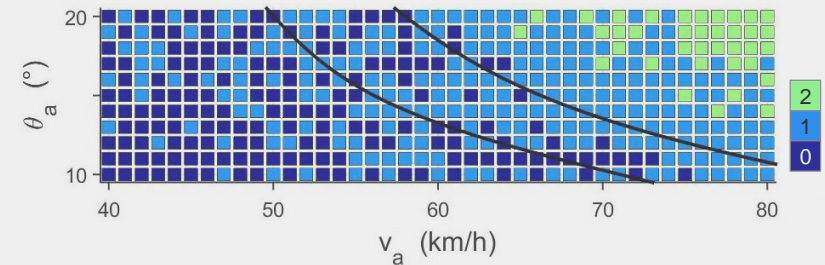
Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der γ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3 vs. Modell #2)

Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix (a)

$$N_{Modell\ #2} - N_{Modell\ #3}$$



$$\bar{C}_w, \bar{C}_a = f(v)$$

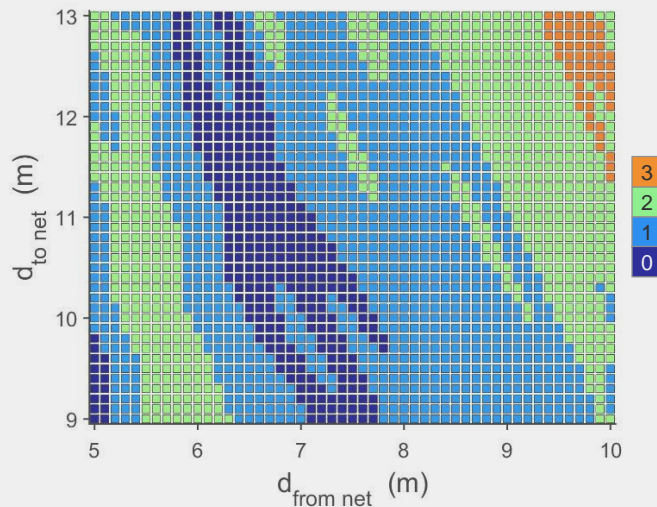


$$\bar{C}_w, \bar{C}_a = \text{const.}$$

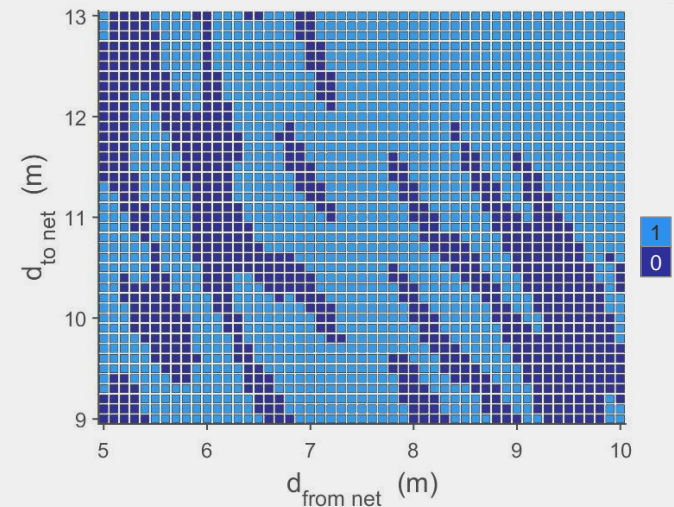
Kovarianzbasiertes Trajektorienmodell in der γ -Unsicherheitsquantifizierung (Modell #3 vs. Modell #2)

Anzahl von Eigenwerten der $|\vec{X}|$ - bzw. P-Kovarianzmatrix (b)

$$N_{Modell\ #2} - N_{Modell\ #3}$$



$$\bar{C}_w, \bar{C}_a = f(v)$$



$$\bar{C}_w, \bar{C}_a = \text{const.}$$